Croissances comparées

Dans les chapitres 4 et 6, on a démontré les propriétés suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Exercice 1:

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

On dit qu'a l'infini, « l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x »et « les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x ».

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. Conclure.
4. Tracer la courbe de la fonction f pour $x \in [0; 3]$.

Exercice 3:

Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^8 + 6x^2 + 2}{1 + e^x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} - ln(x)$

Exercice 4:

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2(1 - \ln x)$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en 0.
3. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. En utilisant les résultats précédents, étudier le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5:

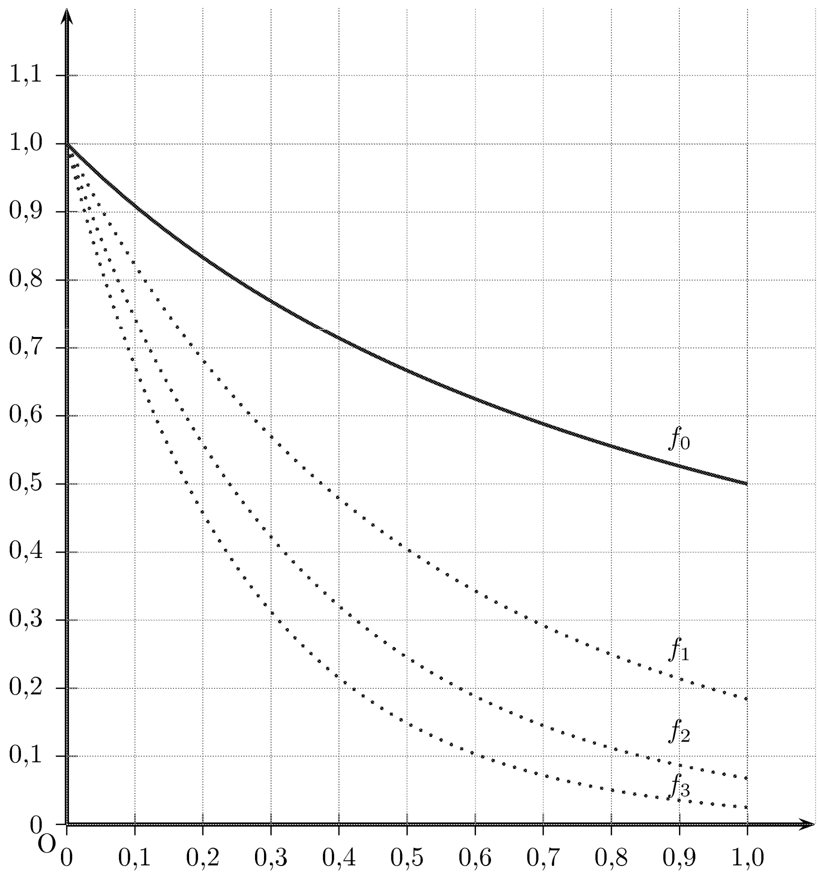
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

   pour différentes valeurs de n :



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right).$$

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.