Chapitre 14: fonctions puissances

1 Fonction $x \longmapsto a^x$

Définition:
*a est un réel **strictement positif**. On appelle « fonction exponentielle de base a », la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

.

Remarque:
L'exponentielle de base a est assimilable à l'élévation d'un réel à une puissance réelle.

- *Si $a = 1$, $f(x) = 1$ pour tout x réel.*
- *Si $a = e$, $f(x) = e^x$ pour tout x réel. On retrouver la fonction exponentielle.*

Propriété:
Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux réels, pour tous réels x et y :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$. • $(a^x)^y = a^{xy}$ • $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$. • $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$. • $(ab)^x = a^x \times b^x$. • $\ln(a^x) = x \ln a$.

2 La fonction racine n-ième

Théorème:
n est un entier, $n \geq 2$. Pour tout réel $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ est le seul réel strictement positif dont la puissance n-ième est x.

Démonstration:
Comme $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}} = e^{x \ln \frac{1}{n}} > 0$ et $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$. (existence)
Supposons qu'il existe $y > 0$ tel que $y^n = x$, alors $(y^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}$ et $(y^n)^{\frac{1}{n}} = y$ d'où $y = x^{\frac{1}{n}}$. (unicité)

Définition:
*n est un entier, $n \geq 2$. La **racine n-ième** d'un réel $x \leq 0$ est définie par :*

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Remarque:
La racine n-ième de x est aussi notée $\sqrt[n]{x}$

- *Si $n = 2$, $x^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de x ;*
- *Si $n = 3$, $x^{\frac{1}{3}}$ est la racine cubique de x.*