Adéquation à une loi équirépartie

Introduction

On lance 100 fois une pièce de monnaie, on obtient 56 fois « Face »et 44 fois »Pile ».

Si l'on considère la pièce équilibrée, lancer la pièce de monnaie est une expérience aléatoire qui suit la loi équirépartie.

On nomme f_i les fréquences observées et p_i les probabilités des différents événements. Pour « mesurer »l'écart entre la distribution observée des fréquences f_i avec celle des p_i liées à la loi équirépartie, on calcule le nombre obtenu en ajoutant toutes les valeurs $(f_i - p_i)^2$. Notons d^2 cette somme.

$$d^2 = \sum_{i=1}^{2} (f_i - p_i)^2$$

Compléter la tableau ci-dessous et en déduire d^2 :

	Fréquence observée (f_i)	Probabilité (p_i)	$(f_i - p_i)^2$
Pile			
Face			

Si les valeurs théoriques et observées sont proches les unes des autres, d^2 sera petit et on considérera qu'il y a adéquation entre l'expérience et la loi équirépartie, c'est à dire que l'expérience permet de dire que la pièce peut être équilibrée (mais ne l'assure pas !).
Reste à décider à partir de quelle borne les valeurs de d^2 peuvent être considérées comme assez petites pour que le test soit jugé positif. (Dire que le test est positif signifie donc que « l'expérience ne permet pas de dire que la pièce n'est pas équilibrée »).

Échantillonnage

	A	B	C	...	CW	CX	CY	CZ
1	Lancer	1	2	...	100	Pile	Face	$1000d^2$
2								
3								

1. Réaliser à l'aide d'un tableur une simulation de 100 lancers de pièce suivant la loi équirépartie.
   a. Entrer en B2 la formule `=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;2)=1 ;"P" ;"F")` et recopier là jusqu'en CW2 ;
   b. Entrer en CX2 la formule `=NB.SI(A2 :CW2 ;"P")`.
2. Déterminer en CZ2 la valeur de $1000d^2$.
3. Recommencer cette simulation 100 fois, 500 fois et 1000. En considérant la série des $1000d^2$ obtenus pour chaque simulation, compléter le tableau ci-dessous :

N	100	500	1000
minimum			
Q_1			
m_e			
Q_3			
d_9			
maximum			

Adéquation

Les résultats permettent de constater que pour $N = 500$ et $N = 1000$, les paramètres des séries sont égaux à 10^{-4} près (sauf les maximums). On les considère ainsi comme des valeurs étalons.

On convient alors qu'il n'y a pas adéquation entre l'observation et la théorie, au risque de 10%, si $d^2 > d_9$ avec $1000d_9 = 12,8$. Plus précisément, si la théorie est vraie (pièce équilibrée), il y aura 10 chances sur 100 de refuser une adéquation valide. Dans le cas contraire, c'est à dire si $d^2 \leq d_9$, l'expérience n'aura pas montrer d'inadaptation avec la théorie. On acceptera cette théorie comme modèle de l'expérience, cela ne signifie pas qu'elle est vraie.
On dit qu'**on l'accepte au niveau de l'expérience**.

La pièce initiale peut-elle être considérée comme équilibrée au seuil de 10%.

Amérique du Sud Novembre 2010(5 points)

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.
2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

   a. Déterminer $P(S \cap A)$.

   b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

   c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

   a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :

$$d^2 = \sum_{k=1}^{k=3} \left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$$

   Calculer d^2 puis $1000d^2$.

   b. On simule 3000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1 ; 2 ; 3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,0005	0,0763	0,2111	0,48845	0,9401	1,5104	5,9256

   Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?