Exercices type bac

Nouvelle Calédonie Mars 2011(5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

Réunion Juin 2010(5 points)

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :

   (E) : pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifient la condition .
3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?
4. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x.$$

   On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

   b. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathcal{C}$.