

## Correction commentée de l'exercice 89 page 341

A tout nombre complexe  $z = x + iy$ ,  $z \neq -1$ , on associe le complexe

$$Z = \frac{2iz - i}{z + 1}$$

1. Calculez  $\overline{Z}$ ,  $Re(Z)$ ,  $Im(Z)$  et  $|Z|$  en fonction de  $x$  et  $y$  :

*Pour répondre à cette question, il faut d'abord écrire  $Z$  sous forme algébrique.*

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2iz - i}{z + 1} \\ &= \frac{2i(x + iy) - i}{x + iy + 1} \\ &= \frac{(2ix - 2y - i)(x + 1 - iy)}{(x + 1 + iy)(x + 1 - iy)} \\ &= \frac{2x^2i + 2xi + 2xy - 2xy - 2y + 2y^2i - ix - i - y}{(x + 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{-3y + i(2x^2 + 2y^2 + x - 1)}{(x + 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \overline{Z} &= \frac{-3y - i(2x^2 + 2y^2 + x - 1)}{(x + 1)^2 + y^2} \\ Re(Z) &= \frac{-3y}{(x + 1)^2 + y^2} \\ Im(Z) &= \frac{2x^2 + 2y^2 + x - 1}{(x + 1)^2 + y^2} \\ |Z| &= \frac{|2i(x + iy) - i|}{|x + iy + 1|} \\ &= \frac{|-2y + i(-1 + 2x)|}{|x + 1 + iy|} \\ &= \frac{\sqrt{4y^2 + (-1 + 2x)^2}}{\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4y^2 + (-1 + 2x)^2}{(x + 1)^2 + y^2}} \end{aligned}$$

2. Pour  $z \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\iff \sqrt{\frac{4y^2 + (-1 + 2x)^2}{(x + 1)^2 + y^2}} = 1 \\ &\iff \frac{4y^2 + (-1 + 2x)^2}{(x + 1)^2 + y^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{En effet } \frac{4y^2 + (-1 + 2x)^2}{(x + 1)^2 + y^2} > 0$$

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\iff 4y^2 + (-1 + 2x)^2 = (x + 1)^2 + y^2 \\ &\iff 4y^2 + 1 - 4x + 4x^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\ &\iff y^2 - 2x + x^2 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathcal{E}_1$  est l'ensemble des points  $M$  appartenant au cercle de centre  $I(1, 0)$  et de rayon 1.

On remarque que le point d'affixe  $-1$  n'appartient pas au cercle, nul besoin de l'enlever comme dans les exercices 87 et 88.

3.  $\mathcal{E}_2$  correspond aux points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur, c'est à dire tels que  $\operatorname{Re}(Z) = 0$ .

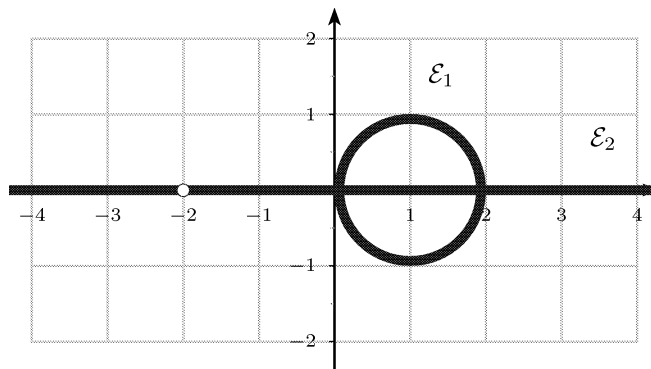
$$\operatorname{Re}(Z) = 0 \iff \frac{-3y}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$$\iff -3y = 0$$

$$\iff y = 0$$

**Conclusion :**  $\mathcal{E}_2$  est l'ensemble des points  $M$  appartenant à l'axe des abscisses privé du point d'affixe  $-1$ .

4. Représentation :



Les points d'intersection de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

**Conclusion :**  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  s'intersectent en  $A(0;0)$  et en  $B(2;0)$ .