Introduction aux nombres complexes

En 1545, le mathématicien italien Girolamo Cardano (appelé Jérôme Cardan en France) publie une méthode pour résoudre des équations de degré 3. Il semble en fait que cette méthode soit très largement *empruntée* à un autre mathématicien italien, Tartaglia. Nous allons voir sur un exemple comment mettre en œuvre cette méthode.

L'équation $x^3 = 18x + 35$

L'idée de base de la méthode consiste à poser $x = u + v$ où u et v sont à déterminer.

1. a. Montrer que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ puis exprimer x^3 en fonction de u et v.
   b. Exprimer $3uvx + u^3 + v^3$ en fonction de u et v.
   c. Que peut-on en déduire ?
2. a. Par identification avec l'équation de départ : $x^3 = 18x + 35$, on a envie de poser :

$$\begin{cases} 3uv = \dots\dots\dots\dots\dots \\ u^3 + v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} u^3v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \\ u^3 + v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

   b. En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on obtient donc le système :

$$\begin{cases} UV = \dots\dots\dots\dots\dots \\ U + V = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

   c. En déduire par substitution que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U = 35 - V \end{cases}$$

   où la première équation est une équation du second degré d'inconnue V.
   d. Résoudre $V^2 - 35V + 216 = 0$.
   e. En déduire :
   - les solutions $(U\ ;\ V)$ du système précédent ;
   - les valeurs possibles de $(u\ ;\ v)$;
   - *les* valeur*s* de x correspondante*s*.

L'équation $x^3 = 15x + 4$ On recommence...

1. Mettre en œuvre la méthode précédente en posant toujours $x = u + v$ et en identifiant les coefficients de la nouvelle équation :

$$\begin{cases} 3uv = \dots\dots\dots\dots\dots \\ u^3 + v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \\ u^3 + v^3 = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} UV = \dots\dots\dots\dots\dots \\ U + V = \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

2. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $V^2 - 4V + 125 = 0$.

Une idée lumineuse

Le mathématicien italien Rafael Bombelli a alors une idée : il décide d'écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-484}$ et de continuer à travailler en utilisant les formules *classiques* des solutions d'une équation de degré 2 ainsi que les règles de calculs usuelles.

1. Retrouver les solutions obtenues par Bombelli (essayer de simplifier).
2. En déduire les solutions $(U\ ;\ V)$ du système $\begin{cases} V^2 - 4V + 125 = 0 \\ U = 4 - V \end{cases}$ avec les notations de Bombelli.
3. Il reste à trouver u et v tels que $u^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ et $v^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$.
   Vérifier que $u = 2 + \sqrt{-1}$ et $v = 2 - \sqrt{-1}$ conviennent, en supposant que $\sqrt{-1}$ suivent les règles de calcul usuelles des racines carrés (en particulier $(\sqrt{a})^2 = a$).
4. a. En déduire une valeur de x.
   b. Vérifier que cette valeur est bien solution de l'équation de départ.

Les limites de la notation $\sqrt{-1}$

1. En utilisant la *règle* $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$, calculer de deux manières différentes le carré de $\sqrt{-1}$.
2. En quoi cela pose-t-il problème ?

C'est pourquoi à partir de maintenant, **vous ne devez plus en aucun cas écrire $\sqrt{-1}$!**

Euler à la rescousse

Quelques deux siècles plus tard, le mathématicien suisse Leonhard Euler décide d'introduire une nouvelle notation : le **nombre imaginaire** i qui vérifie

$$i^2 = -1$$

L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ où a et b sont réels est appelé l'ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$.
En utilisant les règles de calculs usuelles, simplifier les expressions suivantes :

1. $(-i)^2$;
2. $2i - 5i$;
3. $3i \times (-2)$;
4. $4i \times 5i$;
5. $(2 + 3i) + (5 - 2i)$;
6. $(2 + 3i) \times (5 - 2i)$;
7. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$;
8. $\frac{1}{i}$.