# Chapitre 1: Les nombres complexes

## 1 Notion de nombre complexe

**Définition:**
- *on admet l'existence d'un nombre imaginaire noté i vérifiant* $i^2 = -1$.
- *un nombre complexe est de la forme* $a + bi$ *avec* $a$ *et* $b$ *réels.*
- *l'ensemble des nombres complexes est noté* $\mathbb{C}$.

**Remarque:**
*Tous les nombres réels sont des nombres complexes.*

**Théorème:**
*Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme* $a + ib$ *où* $a$ *et* $b$ *sont deux nombres réels.*

**Remarques:**
- *Cette écriture* $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$, *s'appelle la forme algébrique du complexe.*
- $x$ *s'appelle la partie réelle du complexe. Si* $z = a + ib$, *alors on note* $Re(z)$ *la partie réelle de* $z$ *et* $Re(z) = a$.
- $y$ *s'appelle la partie imaginaire du complexe. Si* $z = a + ib$, *alors on note* $Im(z)$ *la partie réelle de* $z$ *et* $Im(z) = b$.

**Propriété:**
*Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.*

**Remarques:**
*Des nombres complexes particuliers.*
- $z$ *est réel si et seulement si* $Im(z) = 0$.
- $z$ *est un imaginaire pur si et seulement si* $Re(z) = 0$.

## 2 Opérations dans $\mathbb{C}$

**Définition:**
*Si* $z = a + bi$ *et* $z' = a' + b'i$ *avec* $a$, $b$, $a'$ *et* $b'$ *réels, on définit :*

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i \text{ et } zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

*Ces deux opérations possèdent les mêmes propriétés que dans* $\mathbb{R}$. *En pratique, il suffit d'appliquer les propriétés de calcul usuelles en remplaçant* $i^2$ *par* $-1$.

**Définition:**
*Si* $z$ *est un nombre complexe non nul, il existe un unique complexe* $z'$ *tel que* $zz' = 1$. *Ce nombre complexe* $z'$ *est appelé inverse de* $z$ *et noté* $\frac{1}{z}$.

**Remarque:**

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

**Définition:**
*Si* $z'$ *est non nul, on définit le quotient* $\frac{z}{z'}$ *par* $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

# 3 Conjugué

**Définition:**
*Soi $z = a + bi$ avec $a$ et $b$ réels. Le nombre complexe conjugué de $z$, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $a - ib$.*

**Propriété:**
*Pour tous complexes $z$ et $z'$ :*

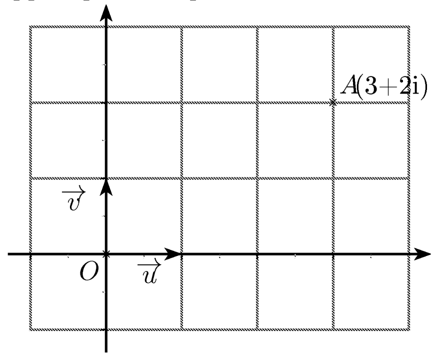
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *si* $z \neq 0$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ *si* $z' \neq 0$

$z\overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$
$z + \overline{z} = 2Re(z)$
$z - \overline{z} = 2iIm(z)$
$\overline{(\overline{z})} = z$
$(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ *pour tout entier $n$ non-nul*

**Propriété:**
*Un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.*
*Il est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.*

# 4 Représentation d'un nombre complexe par un point du plan

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et est appelé plan complexe.




**Définition:**
- *Á tout nombre complexe $a + ib$, où $a$ et $b$ sont réels, on associe le point $M(a; b)$ appelé point image de $z = a + ib$.*
- *Réciproquement, à tout point $M(a; b)$ on associe le nombre complexe $a + ib$ appelé affixe de $M$. On note alors $M(a + ib)$.*

# 5 Module, argument, forme trigonométrique

Dans ce paragraphe le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

<u>Repérages cartésien et polaire :</u>
Dans le plan complexe, un point $M$ d'affixe $a + ib$ distinct de $O$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(a; b)$ ou par un couple $(r; \theta)$ de coordonnées polaires avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array}\right. \qquad et \qquad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{array}\right.$$

## A) Module d'un nombre complexe

**Définition:**
*Si $M$ est un point du plan complexe d'affixe $z$ alors la distance $OM$ est appelée module du nombre complexe $z$, noté $|z|$.*
*Le module de $z$, d'écriture algébrique $a + ib$ est donc le nombre réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*

**Remarques:**
- *Si $a$ est un nombre réel, le module de $a$ est égal à la valeur absolue de $a$.*
- *$|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ car $OM = 0$ équivaut à $M = O$.*
- *$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$*

## B) Arguments d'un nombre complexe non nul

**Définition:**
*Dans le plan complexe, soit $z$ un nombre complexe non-nul de point image $M$.*
*On appelle argument de $z$ et on note $arg(z)$, toute mesure en radians, de l'angle orienté : $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.*

**Remarques:**

- *Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments,si* $\theta$ *est l'un d'entre eux, tout autre est de la forme* $\theta + k2\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
- *On note* $arg(z) \equiv \theta \ (2\pi)$ *ou plus simplement* $arg(z) = \theta$.
- *Pour un nombre réel a :* $arg(a) \equiv 0(2\pi)$
- *Pour z imaginaire pur :* $arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ *ou* $arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

## C) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

**Propriété:**

*Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *avec* $r = |z|$ *et* $\theta = arg(z)$
*Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.*

**Remarques:**

- *Pour z de forme algébrique* $a + ib$ *on a :* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ ; $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.
- *Attention la forme trigonométrique n'est pas unique.*

**Propriété:**

$z = z' \iff |z| = |z'|$ *et* $arg(z) \equiv \arg(z') \ (2\pi)$.

## D) Propriétés du module et des arguments.

Dans tout ce paragraphe $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes.

**Théorème:**

$|\overline{z}| = |z|$ *et* $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z) \ (2\pi)$.

**Théorème:**

$|zz'| = |z|\,|z'|$ *et* $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z') \ (2\pi)$.

**Conséquences** : Pour tout entier naturel non-nul $n$ ; $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) \equiv n\ arg(z) \ (2\pi)$.

**Théorème:**

*Si* $z' \neq 0$ ; $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z') \ (2\pi)$.

**Conséquences** : Pour $z \neq 0$ ; $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -arg(z) \ (2\pi)$

# 6 Résolution des équations du second degré

**Propriété:**

*Pour tous complexe z et z',* $zz' = 0$ *si et seulement si* $z = 0$ *ou* $z' = 0$.

**Propriété:**

*Soient a, b et c des nombres réels tels que* $a \neq 0$.
*l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$*, de discriminant* $\Delta$ *admet :*

- *deux solutions réelles* $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *si* $\Delta > 0$.
- *une solution réelle double* $-\dfrac{b}{2a}$ *quand* $\Delta = 0$.
- *deux solutions complexes* $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *quand* $\Delta < 0$.