

Propriétés du module et des arguments

1) Conjugué

a. Soit z un nombre complexe. Montrer que :

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$$

b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 2 - 2i$.

c. En déduire le module et un argument du nombre complexe \bar{z} .

2) Produit

a. Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que :

$$|zz'| = |z||z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$$

b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z = -1 + \sqrt{3}i$ et $z' = 2 + 2i$.

c. En déduire le module, un argument et une forme trigonométrique de zz' .

d. Déterminer l'écriture algébrique de zz' puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

e. Soit z un nombre complexe. Montrer par récurrence que :

$$\text{Pour tout entier naturel non-nul } n, \quad |z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$$

f. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

g. En déduire le module et un argument de z^3 .

h. Déterminer l'écriture algébrique de z^3 .

3) Quotient

a. Soit z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$. Montrer que :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$$

b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z = 2i$ et $z' = -1 - i$.

c. En déduire le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.

d. Déterminer l'écriture algébrique de $\frac{z}{z'}$.

e. Soit z un nombre complexe non-nul. Montrer que :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$$

f. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

g. En déduire le module et un argument de $\frac{1}{z}$.

h. Déterminer l'écriture algébrique de $\frac{1}{z}$.

4) Bilan

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

Dans chaque cas, déterminer le module, un argument, une forme trigonométrique et la forme algébrique du nombre complexe :

a. $Z_1 = \frac{1}{z^2}$

b. $Z_2 = \bar{z}^2$

c. $Z_3 = i\bar{z}$

d. $Z_4 = \frac{i}{\bar{z}}$

e. $Z_5 = \bar{z} + \frac{3}{2}i$