

# Chapitre 2: Limites et continuité

## 1 Limite à l'infini

### A) Limite finie

#### Définition:

$l$  désigne un réel. Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

#### Remarque:

On définit de la même manière la notion de limite  $l$  en  $-\infty$  que l'on note  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

#### Exemples:

Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  ont pour limite 0 en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

#### Propriété:

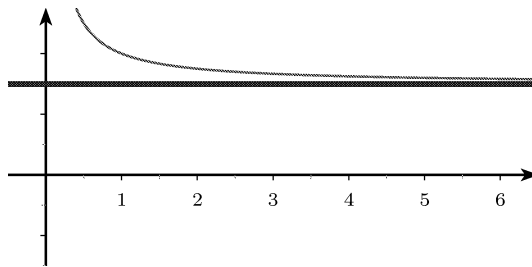
Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan :

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

#### Exemple:

Pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$

donc la droite d'équation  $y = 3$  est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $x \mapsto \frac{3x+1}{x}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$



### B) Limite infinie

#### Définition:

Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  signifie que tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

#### Remarque:

On définit de la même manière la notion de limite  $-\infty$  en  $+\infty$ , la notion de limite  $+\infty$  en  $-\infty$  et la notion de limite  $-\infty$  en  $-\infty$ .

#### Exemples:

La fonction  $x \mapsto x^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  a pour limite :

- Si  $n$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .
- Si  $n$  est impair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

**Propriété:**

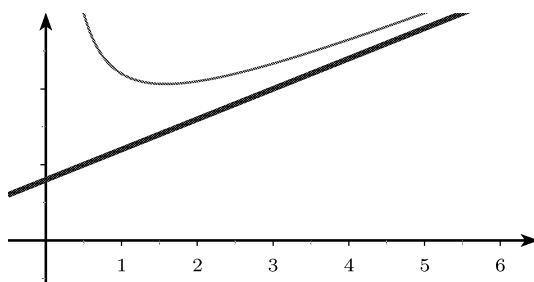
Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan; S'il existe deux réels  $a$  et  $b$  ( $a \neq 0$ ) tels que :

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

**Exemple:**

Pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{2x^2 + 4x + 5}{x} = 2x + 4 + \frac{5}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (2x + 4) = 0$

donc la droite d'équation  $y = 2x + 4$  est une asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $x \mapsto \frac{2x^2 + 4x + 5}{x}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$



## 2 Limite en un réel $a$

**Définition:**

Dire qu'une fonction  $f$  tend vers un réel  $l$  en  $a$ , c'est dire que  $f(x)$  peut-être rendu aussi proche de  $l$  que l'on veut, à condition que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

**Propriété:**

- Si  $f$  admet une limite en  $a$  alors elle est unique.
- Si  $f$  est définie en  $a$  et admet une limite en  $a$  alors cette limite est égale à  $f(a)$ .

**Définition:**

On dit que la limite de  $f$  en  $a$  est  $+\infty$  si, lorsque  $x$  tend vers  $a$ ,  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

**Exemple:**

Soit  $f$  la fonction inverse définie pour tout réel non-nul  $x$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

- Les réels  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $]100; +\infty[$  pour  $0 < x < 0,01$ , on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à droite en 0 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

- Les réels  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $]-\infty; -100[$  pour  $-0,01 < x < 0$ , on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  à gauche en 0 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

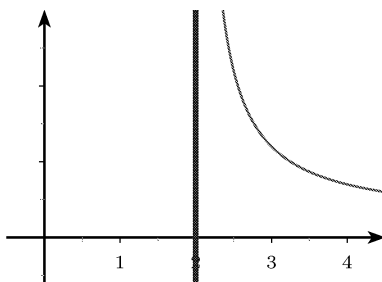
**Définition:**

Soit  $a$  un réel et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de  $f$  en  $a$  est  $+\infty$  ou  $-\infty$ , on dit que la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Exemple:**

Pour  $x > 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x-2} = +\infty$

donc la droite d'équation  $x = 2$  est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $x \mapsto \frac{3+x}{x-2}$ .



### 3 Opérations sur les limites

#### A) Limite d'une somme

**Théorème:**

Dans le tableau suivant,  $l$  et  $l'$  sont deux réels et  $a$  est soit un réel soit  $-\infty$  ou soit  $+\infty$ .

|                                       |        |           |           |           |           |           |
|---------------------------------------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si la limite de $f$ en $a$ est        | $l$    | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| et la limite de $g$ en $a$ est        | $l'$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors la limite de $(f+g)$ en $a$ est | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>FI</b> |

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de  $(f+g)$ .

**Exercice:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

#### B) Limite d'un produit

**Théorème:**

Dans le tableau suivant,  $l$  et  $l'$  sont deux réels et  $a$  est soit un réel soit  $-\infty$  ou soit  $+\infty$ .

|                                              |       |           |           |           |           |           |           |           |             |
|----------------------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si la limite de $f$ en $a$ est               | $l$   | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0           |
| et la limite de $g$ en $a$ est               | $l'$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| alors la limite de $(f \times g)$ en $a$ est | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | <b>FI</b>   |

**Exercice:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = 6$$

#### C) Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- le dénominateur a une limite non-nul :

**Théorème:**

Dans le tableau suivant,  $l$  et  $l'$  sont deux réels et  $a$  est soit un réel soit  $-\infty$  ou soit  $+\infty$ .

|                                             |                |             |           |           |           |           |             |
|---------------------------------------------|----------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si la limite de $f$ en $a$ est              | $l$            | $l$         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| et la limite de $g$ en $a$ est              | $l' \neq 0$    | $\pm\infty$ | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $\pm\infty$ |
| alors la limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ est | $\frac{l}{l'}$ | 0           | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | <b>FI</b>   |



**Propriété:**

$a, b$  et  $c$  désignent soit un réel soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ .  $u, v$  et  $f$  désignent des fonctions telles que  $f$  est la composée de  $u$  suivie de  $v$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} v(y) = c$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

**Exemple:**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ . On a  $f(x) = v[u(x)]$  avec  $u(x) = 2 + \frac{1}{x}$  et  $v(y) = \sqrt{y}$ .  
De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$  et  $\lim_{y \rightarrow 2} v(y) = \sqrt{2}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

## 5 Théorème de comparaison

**Théorème: (Théorème des gendarmes)**

Soit  $f, u$  et  $v$  trois fonctions définies au voisinages de  $+\infty$ . Si pour tout  $x$  dans un intervalle  $]A; +\infty[$  on a :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

**Démonstration:**

Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant  $l$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$  donc il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x > M$  ;  $u(x) \in I$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$  donc il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x > M$  ;  $v(x) \in I$ .

Si on note  $M''$  le plus grand de  $A, M$  et  $M'$  alors pour tout  $x > M''$  ;  $f(x) \in I$ .

On en déduit donc que  $f$  converge vers  $l$  en  $+\infty$ .

**Théorème:**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $+\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \geq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

**Remarque:**

On a des propriétés similaires dans le cas de limite en  $-\infty$  et en un réel  $a$ .

## 6 Continuité

### Définition:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$ .

$f$  est dite continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f$  est dite continue sur  $I$  si et seulement si elle est continue en tout réel de  $I$ .

### Remarque:

*Interprétation graphique*

Dire que  $f$  est continue sur  $I$  signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $I$  sans avoir à lever le crayon.

### Propriété:

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- les fonction  $\sin$  et  $\cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction racine carrée est continue sur  $[0; +\infty[$ .
- Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $u + v$ ,  $ku$  ( $k$  réel),  $uv$  le sont aussi; si l'on suppose de plus que  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{1}{v}$  et  $\frac{u}{v}$  sont continues sur  $I$ .

### Exemple:

La fonction  $x \mapsto x^2 + \cos(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions continues

## 7 Théorème des valeurs intermédiaires

### Théorème:

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  de  $[a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

### Corollaire:

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  a une solution unique dans  $[a; b]$ .

### Démonstration:

L'existence de la solution est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires.

Supposons qu'on ait deux solutions distinctes  $x_0$  et  $x_1$ .

D'une part  $f(x_0) = k = f(x_1)$ .

D'autre part comme  $x_0 \neq x_1$  (par exemple  $x_0 < x_1$ ) alors  $f(x_0) \neq f(x_1)$  car  $f$  est strictement monotone.

C'est absurde donc on ne peut pas avoir deux solutions distinctes. Il n'existe donc qu'une unique solution à l'équation.

### Remarque:

Il existe des extensions à ce corollaire dans le cas d'intervalles ouverts ou semi-ouvert à l'aide des limites. Voir les exemples dans les exercices