

Chapitre 2: Limites et continuité

1 Limite à l'infini

A) Limite finie

Définition:

l désigne un réel. Dire qu'une fonction f a pour limite l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers l . On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Remarque:

On définit de la même manière la notion de limite l en $-\infty$ que l'on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exemples:

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété:

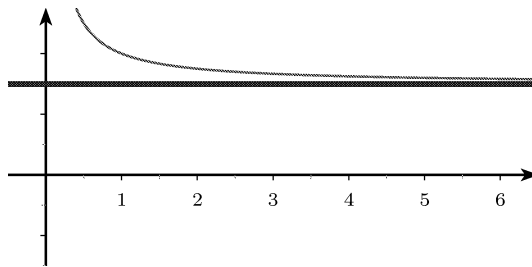
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Exemple:

Pour $x \neq 0$, $\frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$

donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto \frac{3x+1}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$



B) Limite infinie

Définition:

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque:

On définit de la même manière la notion de limite $-\infty$ en $+\infty$, la notion de limite $+\infty$ en $-\infty$ et la notion de limite $-\infty$ en $-\infty$.

Exemples:

La fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ a pour limite :

- Si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- Si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

Propriété:

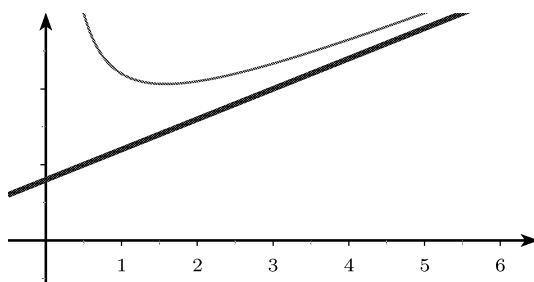
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan; S'il existe deux réels a et b ($a \neq 0$) tels que :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Exemple:

Pour $x \neq 0$, $\frac{2x^2 + 4x + 5}{x} = 2x + 4 + \frac{5}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (2x + 4) = 0$

donc la droite d'équation $y = 2x + 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2 + 4x + 5}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$



2 Limite en un réel a

Définition:

Dire qu'une fonction f tend vers un réel l en a , c'est dire que $f(x)$ peut-être rendu aussi proche de l que l'on veut, à condition que x soit suffisamment proche de a . On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Propriété:

- Si f admet une limite en a alors elle est unique.
- Si f est définie en a et admet une limite en a alors cette limite est égale à $f(a)$.

Définition:

On dit que la limite de f en a est $+\infty$ si, lorsque x tend vers a , $f(x)$ est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Exemple:

Soit f la fonction inverse définie pour tout réel non-nul x par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100; +\infty[$ pour $0 < x < 0,01$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

- Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty; -100[$ pour $-0,01 < x < 0$, on dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

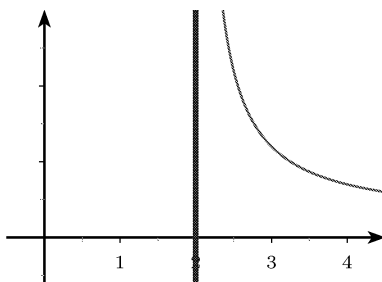
Définition:

Soit a un réel et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple:

Pour $x > 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x-2} = +\infty$

donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto \frac{3+x}{x-2}$.



3 Opérations sur les limites

A) Limite d'une somme

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors la limite de $(f+g)$ en a est	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f+g)$.

Exercice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

B) Limite d'un produit

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors la limite de $(f \times g)$ en a est	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = 6$$

C) Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- le dénominateur a une limite non-nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et la limite de g en a est	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

- le dénominateur a une limite nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 7 = 7 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 7}{\sqrt{x}} = +\infty$$

D) Limites à l'infini des fonctions polynômes**Théorème:**

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle de son monôme de plus haut degré.

Exercice:

Soit la fonction polynôme $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 8$, son monôme de plus haut degré est $5x^3$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

E) Limites à l'infini des fonctions rationnelles**Théorème:**

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle du quotient des monômes de plus haut degré.

Exercice:

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{5x^3 - 7x^2 + 3x - 8}{-6x^4 + 2}$, son monôme de plus haut degré au numérateur est $5x^3$ et son monôme de plus haut degré au dénominateur est $-6x^4$:

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{5x^3}{-6x^2} = -\frac{5}{6x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{6x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

F) Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminées :

$$''\infty - \infty'' \quad ''0 \times \infty'' \quad ''\frac{\infty}{\infty}'' \quad ''\frac{0}{0}''$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".