

4 Limite d'une fonction composé

Définition:

La fonction f est appelée la composée de la fonction u suivie de la fonction v , si on a :

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & f(x) = v[u(x)] \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

On note $f = v \circ u$

Propriété:

a, b et c désignent soit un réel soit $+\infty$, soit $-\infty$. u, v et f désignent des fonctions telles que f est la composée de u suivie de v . Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} v(y) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

Exemple:

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$. On a $f(x) = v[u(x)]$ avec $u(x) = 2 + \frac{1}{x}$ et $v(y) = \sqrt{y}$.
De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$ et $\lim_{y \rightarrow 2} v(y) = \sqrt{2}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

5 Théorème de comparaison

Théorème: (Théorème des gendarmes)

Soit f, u et v trois fonctions définies au voisinages de $+\infty$. Si pour tout x dans un intervalle $]A; +\infty[$ on a :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Démonstration:

Soit I un intervalle ouvert contenant l .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ donc il existe un réel M tel que pour tout $x > M$; $u(x) \in I$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ donc il existe un réel M' tel que pour tout $x > M'$; $v(x) \in I$.

Si on note M'' le plus grand de A, M et M' alors pour tout $x > M''$; $f(x) \in I$.

On en déduit donc que f converge vers l en $+\infty$.

Théorème:

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{array}{l|l} \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \geq g(x) & \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty & \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

Remarque:

On a des propriétés similaires dans le cas de limite en $-\infty$ et en un réel a .