

Encadrements et limites

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x + \sin(1 + x^2)}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Tracer la courbe de cette fonction à l'aide de votre calculatrice et conjecturer la limite de la fonction f .

Définition:

l désigne un réel. Dire qu'une fonction f a pour limite l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers l . On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

3. Donner un encadrement de la fonction f par deux fonctions rationnelles sur son domaine de définition.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de chacune de ces fonctions rationnelles.
5. Conclure sur la limite de f

Théorème: (Théorème des gendarmes)

Soit f, u et v trois fonctions définies au voisinages de $+\infty$. Si pour tout x dans un intervalle $]A; +\infty[$ on a :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

6. Démontrer le théorème ci-dessus.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x - 3 + \cos(x)$

7. Donner un encadrement de la fonction g par deux fonctions rationnelles sur son domaine de définition.
8. Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune de ces fonctions rationnelles.

Définition:

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

9. Conclure sur la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Théorème:

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{array}{l|l} \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \geq g(x) & \text{Si pour } x \text{ assez grand } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty & \text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$