

Dérivation des fonctions composées

Une première démonstration

Démontrer que si une fonction f est dérivable en a alors f est continue en a .

La démonstration

Soit f et g deux fonctions dérivables sur respectivement D_f et D_g . On considère la fonction composée $u = f \circ g$ définie sur D_g (c'est à dire que pour tout réel $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$). L'objectif de la suite est de répondre aux questions suivantes :

u est-elle dérivable sur D_g ? Si oui, quelle est l'expression de $u'(x)$?

1. Soit $a \in D_g$. Rappeler la définition de la dérivabilité a pour la fonction u .
2. On étudie à présent la fonction t définie au voisinage de a par :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

- a. Compléter l'égalité ci-dessous :

$$t(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{\dots\dots\dots} \times \frac{g(x) - g(a)}{\dots\dots\dots}$$

- b. Déterminer la limite de chacun des termes qui compose t en a .
- c. Conclure.
3. Répondre à la question initiale.

Exemples

Dans chaque cas déterminer la fonction $f = u \circ v$, préciser son domaine de définition et étudier sa dérivabilité.

- a. $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x - 4$
- b. $u(x) = x^3$ et $v(x) = 2x^2 + 6x + 1$
- c. $u(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = 3x + 2$
- d. $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + x + 1$

Applications

1. Soit u un fonction strictement positive et dérivable sur son domaine de définition D_u .

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ est-elle dérivable sur D_u ? Si oui, quelle est l'expression de $f'(x)$?

2. Soit u un fonction dérivable sur son domaine de définition D_u .

Pour $n \geq 1$, $f(x) = [u(x)]^n$ est-elle dérivable sur D_u ? Si oui, quelle est l'expression de $f'(x)$?

3. Soit u un fonction dérivable et non-nul sur son domaine de définition D_u .

Pour $n \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n}$ est-elle dérivable sur D_u ? Si oui, quelle est l'expression de $f'(x)$?