Chapitre 3: Dérivation

1 Dérivabilité en un point

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. Dire que f est dite dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel l signifie que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le nombre dérivé de la fonction f en a est noté $f'(a)$.

Propriété:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a :

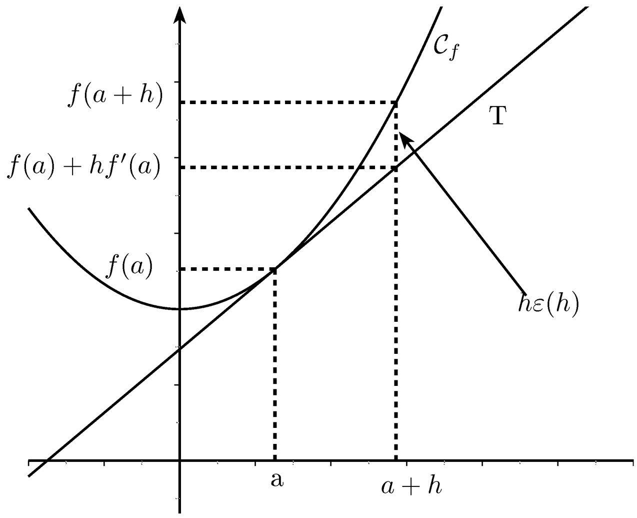
- *$\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f admet une tangente T au point $M(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation :*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- *Pour tout réel h tel que $a + h \in I$,*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad avec \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Autrement dit, la fonction $h \longmapsto f(a) + f'(a)h$ est la meilleur approximation affine de f en a.



Théorème:
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque:
La réciproque est fausse : une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a. Comme le montre par exemple la fonction valeur absolue en 0.

2 Fonction dérivée

2.1 définition

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable *sur I.*
On appelle fonction dérivée de f *la fonction de I dans $\mathbb{R}$, notée f', qui a tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x.*

Remarque: (Écriture différentielle)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.
Pour tout x de I et tout h tel que $x + h \in I$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Posons $\Delta x = (x + h) - x = h$ et $\Delta y = f(x + h) - f(x)$. Alors on a :

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

Si $h \to 0$, $\varepsilon(h) \to 0$ donc $h\varepsilon(h) \to 0$. Lorsque Δx devient infinitésimal, il reste $dy = f'(x)dx$. On note aussi $f' = \dfrac{df}{dx}$.

2.2 Formulaire

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec n entier positif	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec n entier positif	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

2.3 Dérivée et opérations

Propriété:
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $u+v$, ku ($k \in \mathbb{R}$) et uv le sont aussi. Si de plus v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I. Les règles de calculs des dérivées sont les suivantes :

- *Si $f(x) = u(x) + v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.*
- *Si $f(x) = k.u(x)$ ($k \in \mathbb{R}$) alors $f'(x) = k.u'(x)$.*
- *Si $f(x) = u(x).v(x)$ alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.*
- *Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ alors $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.*
- *Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.*

Propriété:
Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ où elles sont définies.

3 Dérivation et variations

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.*
- *Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.*

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- *Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I, alors f est croissante sur I.*
- *Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x dans I, alors f est décroissante sur I.*
- *Si $f'(x) = 0$ pour tout x dans I, alors f est constante sur I.*

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs de x où f' s'annulerait), alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs de x où f' s'annulerait), alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I alors f constante sur I.*

Exemple:
Soit $f : x \longmapsto 3x^3 + 1$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 9x^2$ est strictement positive pour tout réel x non-nul et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème:
Soit f est une fonction dérivable sur un ouvert I. Si f admet un extremum en $c \in I$, alors $f'(c) = 0$.

Remarque:
Sans hypothèse supplémentaire, ce théorème n'admet pas de réciproque. En effet, la dérivée de la fonction de l'exemple précédent s'annule en 0 mais la fonction f n'admet pas d'extremum local en 0 !

4 Dérivation de fonction composés

Propriété:
Soit f dérivable sur J et g dérivable sur I telles que $g(x) \in J$ pour tout x de I. La fonction $f \circ g$ est alors dérivable sur I et :

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) \text{ (ou encore } (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f' \circ g(x)\text{).}$$