

Chapitre 3: Dérivation

1 Dérivabilité en un point

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . Dire que f est dite dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel l signifie que :

Propriété:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . Si f est dérivable en a :

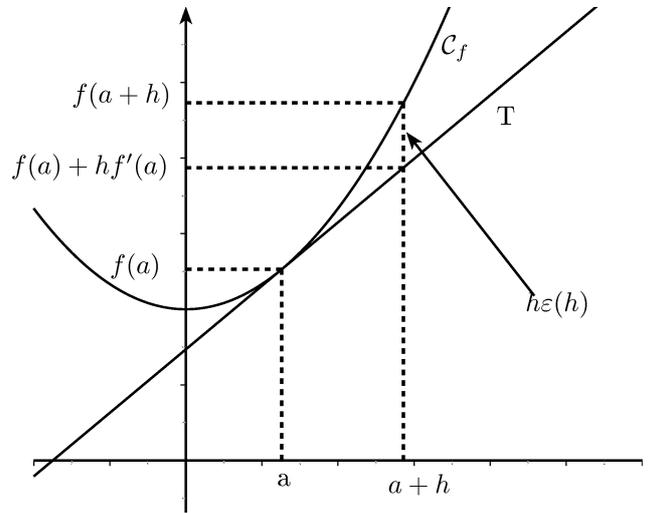
- C_f la courbe représentative de f admet une tangente T au point $M(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Pour tout réel h tel que $a + h \in I$,

.....

Autrement dit, la fonction $h \mapsto f(a) + f'(a)h$ est la meilleur approximation affine de f en a .



Théorème:

.....

Remarque:

La réciproque est fautive : une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a . Comme le montre par exemple la fonction valeur absolue en 0 .

2 Fonction dérivée

2.1 définition

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si f est dérivable en tout point de I , on dit que f est dérivable sur I .

On appelle fonction dérivée de f la fonction de I dans \mathbb{R} , notée f' , qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x .

Remarque: (Écriture différentielle)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

Pour tout x de I et tout h tel que $x + h \in I$:

.....

Posons $\Delta x = (x + h) - x = h$ et $\Delta y = f(x + h) - f(x)$. Alors on a :

.....

Si $h \rightarrow 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ donc $h\varepsilon(h) \rightarrow 0$. Lorsque Δx devient infinitésimal, il reste $dy = f'(x)dx$. On note aussi $f' = \frac{df}{dx}$.

2.2 Formulaire

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur \mathbb{R} avec k réel	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur \mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur \mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur \mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur \mathbb{R} avec n entier positif	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ sur \mathbb{R}^* avec n entier positif	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur \mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur \mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos(x)$

2.3 Dérivée et opérations

Propriété:

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $u+v$, ku ($k \in \mathbb{R}$) et uv le sont aussi. Si de plus v ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I . Les règles de calculs des dérivées sont les suivantes :

- Si $f(x) = u(x) + v(x)$ alors

- Si $f(x) = k.u(x)$ ($k \in \mathbb{R}$) alors

- Si $f(x) = u(x).v(x)$ alors

- Si $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ alors

- Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ alors

Propriété:

Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de \mathbb{R} où elles sont définies.

3 Dérivation et variations

Théorème:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I .
- Si f est décroissante sur I , alors $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I .

Théorème:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x dans I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x dans I , alors f est constante sur I .

Théorème:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs de x où f' s'annulerait),

alors

- Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs de x où f' s'annulerait),

alors

- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I alors f constante sur I .

Exemple:

Soit $f : x \mapsto 3x^3 + 1$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 9x^2$ est strictement positive pour tout réel x non-nul et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Théorème:

Soit f est une fonction dérivable sur un ouvert I . Si f admet un extremum en $c \in I$, alors $f'(c) = 0$.

Remarque:

Sans hypothèse supplémentaire, ce théorème n'admet pas de réciproque. En effet, la dérivée de la fonction de l'exemple précédent s'annule en 0 mais la fonction f n'admet pas d'extremum local en 0 !