

Exercices

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x - 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
4. a. Trouver les réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

- b. En déduire que la droite Δ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
- c. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ .
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Déterminer une équation de T , la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 2.
7. Tracer les asymptotes, T puis $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3x}{1 + x^2}$$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ?
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
4. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et T .

Exercice 3:

On définit sur $[0; \pi]$ les fonctions f , g et h par :

$$f(x) = x - \sin x \quad ; \quad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \quad ; \quad h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

1. Étudier le sens de variation de f et en déduire son signe.
2. Reprendre la question 1. pour la fonction g , puis pour la fonction h .
3. En déduire que, pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

Exercice 4:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
4. Démontrer qu'il existe exactement une autre tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui est parallèle à la droite T .
En déterminer une équation.