

Étude de la fonction exponentielle

A) Variations

1. Étudier les variations de la fonction exponentielle.
2. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto e^x - x$. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle sur $[-5; 2]$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 e^x = 1 & e^{2x+3} = e^{\frac{1}{x}} & (e^{-x+1})^2 = \frac{1}{e^3} \\
 e^x < -1 & e^{4x-5} < e^2 & e^{2x} - (e-1)e^{2x-1} - e \geq 0
 \end{array}$$

B) Approximations affines

1. Déterminer une approximation affine de la fonction exponentielle en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ en 0.
3. Déterminer une approximation affine de la fonction exponentielle en 1.
4. Montrer que la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère est située au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

On dit que la fonction exponentielle est convexe

5. Donner un autre exemple de fonction convexe.

C) Croissances comparées

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$. En déduire la limite de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto xe^x$ en $-\infty$.