

Exercices type bac 2011

Polynésie septembre 2010 (4 points)

Partie 1Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction g .
4. Donner le tableau de variations de g .
5. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une unique solution. On note α cette solution.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
c. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
6. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie 2Soit A la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur \mathbb{R} .

Amérique du Nord 27 mai 2011 (3 points)

Partie 1On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de \mathbb{R} , $e^x - x > 0$.

Partie 2On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
a. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

La Réunion 22 juin 2011 (3 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe \mathcal{C} .
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0; +\infty[$.
b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .