Chapitre 4: La fonction exponentielle

1 Définition

Propriété:
Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (E) :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Démonstartion:
Nous admettrons l'existence d'une solution, montrons que celle-ci est unique.

- *Montrons d'abord que si f est une solution de l'équation alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
  Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  $$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f.$$

  La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = g(0) = f(0)f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x_0) = 0$, on aurait alors $g(x_0) = 1 = f(x_0)f(-x_0) = 0$ soit $1 = 0$ ce qui est absurde donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- *Soit f_1 et f_2 deux solutions de (E), posons $q = \dfrac{f_1}{f_2}$.*
  Par ce qui précède f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc q est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables.
  De plus, $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' = \dfrac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} = \dfrac{f_1f_2 - f_1f_2}{f_2^2} = 0$.
  La fonction q est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $q(x) = q(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$: on a donc montré que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est à dire que la solution est unique.

Définition:
On appelle fonction exponentielle, la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle (E).
On la note $x \mapsto \exp(x)$.

Remarque:
On a démontré dans la preuve précédente que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2 Propriétés

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout a et b réels, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- Pour tout a et b réels et $n \in \mathbb{N}$:

  $$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}\ ; \qquad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}\ ; \qquad \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Démonstartion:
Démontrons que $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ *(le reste en exercice) :*
Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ *:*

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \Leftrightarrow \frac{\exp(a+b)}{\exp(a)\exp(b)} = 1,$$

C'est ce que nous allons montrer.
Fixons un réel $b \in \mathbb{R}$ *(*$\exp(b)$ *est alors une constante).*
Soit g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(x)\exp(b)}$.
La fonction $\exp$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$*, donc* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$g'(x) = \frac{\exp(x+b)\exp(x)\exp(b) - \exp(x+b)\exp(x)\exp(b)}{(\exp(b)\exp(x))^2} = 0.$$

La fonction g *est donc constante sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* x *réel,*

$$g(x) = g(0) = \frac{\exp(b)}{\exp(0)\exp(b)} = 1$$

c'est à dire $\dfrac{\exp(x+b)}{\exp(x)\exp(b)} = 1$.
Cette propriété étant vraie pour tout x *réel, elle est vraie pour* $x = a$ *:* $\dfrac{\exp(a+b)}{\exp(a)\exp(b)} = 1$ *soit* $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Remarque:
On admettra que la fonction exponentielle est la seule fonction f *dérivable sur* $\mathbb{R}$*, telle que pour tous* a *et* b *réels,*

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \text{ et } f'(0) = 1.$$

3 Notation e^x

Définition:
L'image de 1 *par la fonction exponentielle est noté* e *:* $\exp(1) = e$.

Remarques:
- *On a* $e^2 = e \times e = \exp(1) \times \exp(1) = \exp(1+1) = \exp(2)$.
- *D'une façon générale, on écrira* e^x *au lieu de* $\exp(x)$.
- *On a* $e \simeq 2,7$.

Propriété:
Avec cette nouvelle notation, on peut écrire les propriétés précédentes de la manière suivante :
- $e^0 = 1$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ *;*
- *pour tout* a *et* b *réels, et* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \quad e^{na} = (e^a)^n.$$

4 Étude de la fonction exponentielle

4.1 Sens de variations et limites

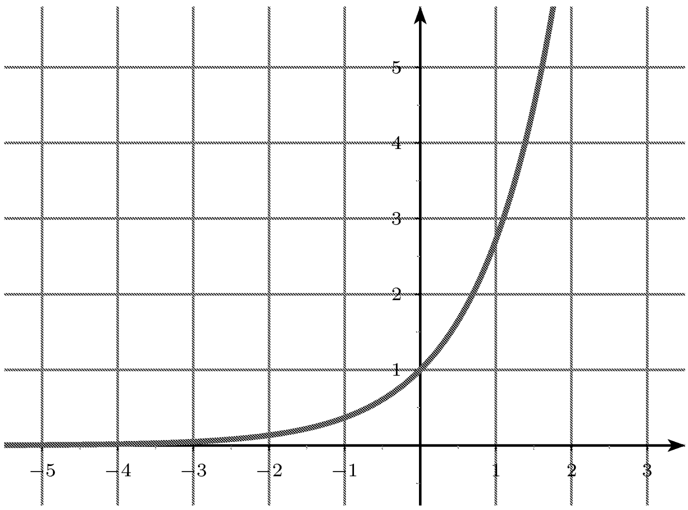
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

4.2 Tableau de variations et représentation graphique

Tableau de variations de la fonction $x \longmapsto \exp(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \exp(x)$:



La courbe représentative de la fonction exponentielle admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote en $-\infty$.

5 Limites utiles

Propriété:

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
- $$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

6 Dérivation

Théorème:
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u.$$