

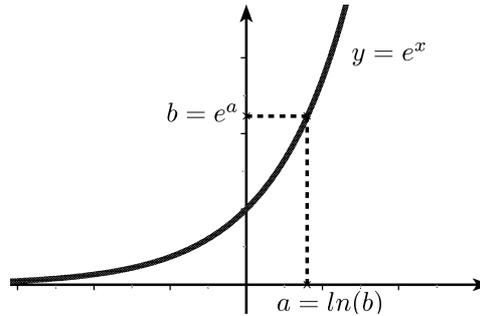
Introduction

A) Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus :

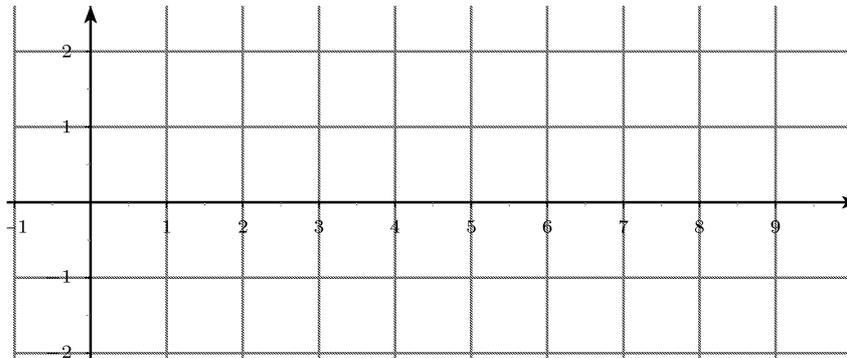
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $b \in]0; +\infty[$, il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = b$. Ce nombre a est noté $\ln(b)$ ou $\ln b$ ce qui se dit « logarithme népérien de b ».



Cela permet de définir la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.

1. Pourquoi ne peut-on pas la définir sur $] - \infty; 0[$?
2. Simplifier $e^{\ln(x)}$ pour $x > 0$.
3. Quels sont les réels $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^2)$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$?
4. Soit x un nombre réel. Simplifier $e^{\ln(e^x)}$. Que peut-on en déduire pour $\ln(e^x)$?
5. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\ln(3)$.
6. À l'aide de la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans le repère ci-dessous :



7. Conjecturer :
 - a. le sens de variation de la fonction \ln ;
 - b. les limites de la fonction \ln en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1:

Pour quelles valeurs de x , les expressions suivantes ont-elles un sens :

- a. $\ln(1 - x^2)$
- b. $\ln(2 + 3x) - \ln(-x + 1)$
- c. $\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{e^{2x+1}}\right)$

Exercice 2:

En utilisant le fait que les fonctions \exp et \ln sont réciproques, résoudre les équations suivantes :

- | | | | |
|-----------------------|-------------------|--|-------------------|
| a. $e^x = 1$ | e. $e^{2x-1} = 2$ | i. $2 \ln(x) - 1 = 6$ | l. $\ln(x^2) = 4$ |
| b. $e^x = 4$ | f. $e^{-x} = -5$ | j. $\ln(2x - 1) = 3$ | |
| c. $e^{2x} = 2$ | g. $\ln(x) = 3$ | k. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1$ | |
| d. $4e^{-x} - 3 = 12$ | h. $\ln(2x) = 0$ | | |

Exercice 3:

En utilisant le fait que les fonctions \ln est strictement croissante, résoudre les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a. $\ln(x) < 2$ | e. $\ln(x^2 + x - 2) \leq \ln(x + 3)$ |
| b. $\ln(x) = -10$ | f. $\ln(x^2 - 8) > 0$ |
| c. $\ln(3x - 1) > -1$ | g. $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$ |
| d. $\ln(3x + 1) = \ln(5x - 2)$ | h. $\ln(x - 2) \geq \ln(2x - 1)$ |

B) Dérivée, variations et signe

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \exp[\ln(x)]$.

- En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\ln'(x)$
On admettra que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - Simplifier $f(x)$ et utiliser cette simplification pour calculer facilement $f'(x)$.
 - En déduire $f'(x)$.
- Valider la conjecture sur les variations de \ln .
- En déduire le signe de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4:

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants en précisant au préalable le domaine de dérivabilité de la fonction f :

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = 4 \ln(x) + 3x + 1$ | 2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x + 1}$ | 3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ |
|-------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|

Exercice 5:

Étudier les variations des fonctions f suivantes en précisant au préalable leur domaine de définition :

- | | | |
|----------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. $f(x) = \ln(x) - x + 6$ | 2. $f(x) = x \ln(x)$ | 3. $f(x) = [\ln(x)]^2$ |
|----------------------------|----------------------|------------------------|