

Limites et croissances comparées

A) Limites de la fonction logarithme aux bornes de son domaine de définition

1. Soit M un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $A \in]0; +\infty[$ tel que pour tout réel $x > A$, $\ln(x) > M$.
2. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en $+\infty$.
3. Montrer que pour $x > 0$, $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$.
4. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en 0.

B) Approximations affines

1. Déterminer une approximation affine de la fonction logarithme en 1.
2. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ en 1.
3. Déterminer une approximation affine de la fonction $\ln(1+x)$ en 0.
4. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0.

C) Croissances comparées

1. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.
2. En déduire la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}$ en $+\infty$ pour n un entier, $n \geq 2$.
3. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto x \ln x$ en 0.
4. En déduire la limite de la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ en 0 pour n un entier, $n \geq 2$.

On posera $X = \ln x$