Chapitre 5: Probabilités

1 Loi de probabilité

Définition:
*Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée. On note $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.*

Exemple:
Lancer un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définition:
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul de telle façon que

$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i.

Remarques:
- *On dit qu'on **modélise** une expérience aléatoire dont les issues constituent Ω lorsque on choisit une loi de probabilité sur Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.*
- *Pour une expérience donnée dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences obtenues dans des séries de taille n se rapproche de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Exemple:
Lancer un dé équilibrée dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On modélise l'expérience aléatoire en définissant la loi de probabilité suivante sur Ω :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Notre modèle est validé par des simulations effectuées à l'aide d'un tableur.

Définition:
Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité $p = \dfrac{1}{n}$, on parle de loi équirépartie.

Définition:
On considère une loi de probabilité définie sur $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où les x_i sont des nombres réels et une loi de probabilité définie sur Ω :

- *L'espérance de la loi de probabilité est le nombre :*

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- *La variance de la loi de probabilité est le nombre :*

$$V = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right) - E^2$$

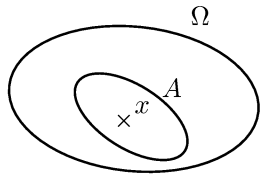
- *L'écart-type de la loi de probabilité est le nombre :*

$$\sigma = \sqrt{V}$$

2 Probabilité d'un événement

Définition:

Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :



- *un événement est une partie de E ;*
- *un événement formé d'une seule issue est appelé un événement élémentaire ;*
- *lorsqu'une issue x appartient à un événement A, on dit que x réalise A ;*
- *lorsqu'aucune issue ne réalise un événement, on dit qu'il est impossible et on le note $\oslash$;*
- *lorsque toutes les issues réalisent un événement, on dit qu'il est certain et on le note Ω.*

Exemples:

Lancer un dé équilibrée dont les faces sont numérotés de 1 à 6 :

- *L'événement « Obtenir un 7 »est un événement impossible.*
- *L'événement « Obtenir un résultat inférieur à 7 »est l'événement certain.*

Définition:

Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.

Propriété:

- *Aucune issue ne réalise l'événement impossible donc $p(\oslash) = 0$*
- *L'événement certain est réalisé par chacune des issues de Ω donc $p(\Omega) = 1$*
- *Pour tout événement A, $0 \leq p(A) \leq 1$*

Exemple:

Un dé est pipé, on attribue les probabilités suivantes aux différentes faces :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

On considère l'événement A « Obtenir un résultat pair ». A est réalisé par la sortie des faces 2, 4 et 6 donc

$$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

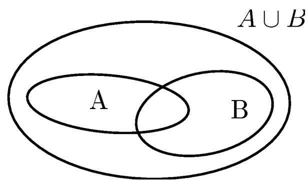
Propriété:

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

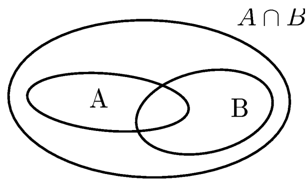
$$p(A) = \frac{nombre\, d'issues\, de\, A}{nombre\, total\, d'issues\, de\, \Omega}$$

3 Calculs de probabilités

A et B sont deux événements de Ω



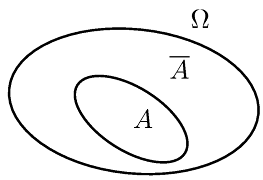
Définition:
L'événement $A \cup B$ (lire « A union B »)est formé des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B.



Définition:
L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B »)est formé des issues qui réalisent l'événement A et l'événement B.

Propriété:
Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. Pour tous événements A et B,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Définition:
L'événement contraire de A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$.

Propriété:
Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. La probabilité d'un événement contraire d'un événement A est donnée par

$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$$

4 Variables aléatoires

Définition:
Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un réel à chaque issue.

Remarque:
Si x est un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x »est noté $(X = x)$.

Exemple:
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie, on note les côtés apparus : P ou F, ainsi : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

A chaque issue de l'expérience, on associe le nombre de fois où pile apparait. On définit ainsi une variable aléatoire sur Ω, elle prend les valeurs 0, 1 et 2.

L'événement $(X = 1)$ est réalisé par les issues PF et FP donc on peut définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Définition:
Une loi de probabilité est définie sur Ω et $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur E.

Cette loi est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire X et

$$\sum_{i=1}^{m} p(X = x_i) = 1$$

Propriété:
L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance, la variance et l'écart-type de sa loi de probabilité. En notant $p_i = p(X = x_i)$ pour chaque x_i, on obtient :

- *L'espérance de la variable aléatoire X est définie par :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

- *La variance de la variable aléatoire X est définie par :*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i x_i^2\right) - E(X)^2$$

- *L'écart-type de la variable aléatoire X est définie par :*

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Dans toute la suite A et B désignent deux événements d'un univers Ω et P une loi de probabilité sur Ω.

5 Probabilités conditionnelles

5.1 Définitions et première propriété

Définition:
On suppose $p(B) \neq 0$.
La probabilité de A sachant B noté $p_B(A)$ est définie par

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

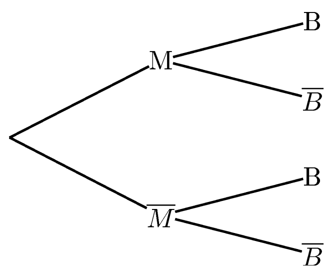
Propriété:
On suppose $p(A) \neq 0$ *et* $p(B) \neq 0$.
- $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$;
- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Démonstration:
Le premier point découle immédiatement de la définition.
De plus, $p_A(B) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ *donc* $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

5.2 Exemple avec un arbre pondéré

On teste l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Dans cette expérimentation, 60% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On étudie la baisse du taux de glycémie après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80% des individus ayant pris le médicament ; on ne constate aucune baisse pour 90% des personnes ayant pris le placebo.
On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des personnes ayant participé à l'expérience.
On appelle :
- M l'événement « l'individu a pris le médicament » ;
- B l'événement « l'individu a une baisse de son taux de glycémie ».

On a l'arbre pondéré suivant :



On a (d'après l'énoncé et l'arbre) : $p(M) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$ et $p_M(B) = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$.
Par multiplication, on obtient :
- $p(M \cap B) = p(M) \times p_M(B) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$
- l'événement $B \cap M$ correspondant au bout de « la branche en haut à droite ».

5.3 Formule des probabilités totales

Propriété:
$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p(\overline{B})$.

Démonstration:
$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ *et* $(A \cap B)$ *et* $(A \cap \overline{B})$ *sont incompatibles donc* $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$. *La deuxième égalité découle de la propriété précédente.*

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a :
$p(B) = P(B \cap M) + p(B \cap \overline{M}) = p(M) \times p_M(B) + P(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$.

6 Indépendance

6.1 Définition

Définition:
Soit A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété:
Si A et B sont de probabilité non nulle, A et B sont indépendants ssi $p_B(A) = P(A)$ (ou $p_A(B) = P(B)$).

Remarque:
Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas les chances que l'autre se réalise.

6.2 Indépendance de variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires. On note respectivement x_1, x_2,...,x_m les valeurs prises par X et y_1, y_2,...,y_n celles prises par Y.

Propriété:
X et Y sont dites indépendantes si et seulement si pour tous i et j, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants ; autrement dit ssi $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$ pour tous i et j.

Exemple:
On lance un dé cubique équilibré.
On définit deux variables aléatoires X et Y comme suit :

- *X prend la valeur 1 si le résultat est pair et la valeur -1 sinon.*
- *Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5 et la valeur 1 sinon.*

Montrons que ces variables aléatoires sont indépendantes.

Pour cela, on donne les lois de probabilité de chacune des variables :

x_i	-1	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y_j	2	1
$p(Y = y_j)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

On a alors :

- $p((X = -1) \cap (Y = 2)) = p(\{5\}) = \frac{1}{6}$ *et* $p(X = -1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ *donc* $p((X = -1) \cap (Y = 2)) = p(X = -1) \times p(Y = 2)$;
- $p((X = -1) \cap (Y = 1)) = p(\{1 \ ; \ 3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *et* $p(X = -1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ *donc* $p((X = -1) \cap (Y = 1)) = p(X = -1) \times p(Y = 1)$;
- $p((X = 1) \cap (Y = 2)) = p(\{2\}) = \frac{1}{6}$ *et* $p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ *donc* $p((X = 1) \cap (Y = 2)) = p(X = 1) \times p(Y = 2)$;
- $p((X = 1) \cap (Y = 1)) = p(\{4 \ ; \ 6\}) = \frac{1}{3}$ *et* $p(X = 1) \times Pp(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ *donc* $p((X = 1) \cap (Y = 1)) = p(X = 1) \times p(Y = 1)$.

On a donc bien montré que $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$ pour toutes les valeurs possibles de x_i et y_j : les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.