Chapitre 7: Applications des nombres complexes à la géométrie

1 Différentes notations d'un nombre complexe

1.1 Notation algébrique

Tout nombre complexe z admet une écriture unique sous la forme $z = a + ib$ appelée forme algébrique de z.
- a est appelée la partie réelle de z notée $Re(z)$
- b est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

1.2 Notation trigonométrique

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$. Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

Le lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique est :
- si l'on connait r et θ alors $a = r\,cos\theta$ et $b = r\,sin\theta$;
- si l'on connait a et b lors $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est défini par : $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$

De plus, la forme trigonométrique n'est pas unique :

$$z = z' \Longleftrightarrow |z| = |z'| \quad \text{et} \quad arg(z) \equiv \arg(z')\ (2\pi)$$

1.3 Notation exponentielle

Définition:
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$z = re^{i\theta}$$

avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$. Cette écriture est appelée forme exponentielle de z .

Remarques:
- $|e^{i\theta}| = 1$
- *Attention la forme exponentielle n'est pas unique elle aussi !*

Propriété:
Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nul alors :

$$z = z' \Longleftrightarrow r = r' \quad et \quad \theta \equiv \theta'\ (2\pi)$$

Propriété:
Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nul alors :

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2 Affixe d'un vecteur

2.1 Définition et conséquences

Définition:
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(a; b)$ est le complexe $z = a + ib$.

Propriété:
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ où z_A et z_B sont les affixes de A et B.

Théorème:
$(A_1; \alpha_1), \cdots, (A_n; \alpha_n)$ sont n points pondérés du plan, d'affixes respectives $z_1, \cdots, z_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors le barycentre G a pour affixe :

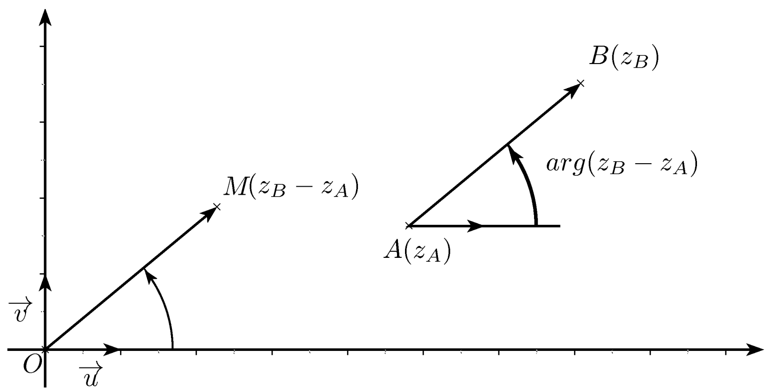
$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_{1+\cdots+\alpha_n}}$$

Conséquences :
Il en découle que l'affixe z_I du **milieu** du segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ et celle du **centre de gravité** G d'un triangle ABC est $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

2.2 Distance AB et angles orientés

Propriété:
A et B sont les points d'affixes z_A et z_B :

- $AB = |z_B - z_A|$
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$



Propriété:
A, B, C et D sont les points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$, alors :

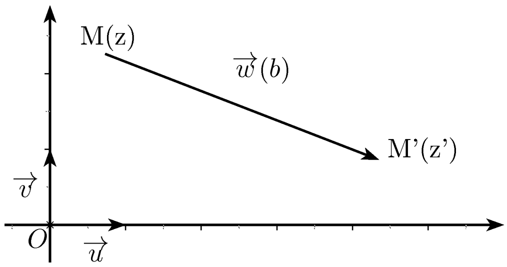
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

3 Écriture complexe des transformations

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$.
T est une transformation du plan complexe, on lui associe la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z affixe du point M associe le complexe z' affixe du point $M' = T(M)$. $z' = f(z)$ est l'écriture complexe de la transformation T.

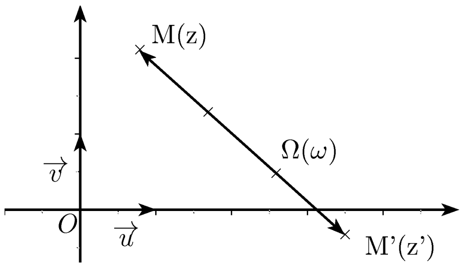
3.1 Écriture complexe d'une translation

Propriété:
Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ est $z' = z + b$.



3.2 Écriture complexe d'une homothétie

Propriété:
Soit Ω le point d'affixe ω et k un réel non nul.
L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est $z' = \omega + k(z - \omega)$.



3.3 Écriture complexe d'une rotation

Propriété:
Soit Ω le point d'affixe ω et θ un réel quelconque.
L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.