Exercices type bac 2011

Réunion Juin 2011 (5 points)

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

- $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = AB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B,\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b et θ.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.
   Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives
   $$z_{\text{P}} = \frac{3}{2}(1+\text{i}), \quad z_{\text{Q}} = \frac{3}{2}(1-\text{i}) \quad \text{et} \quad z_{\text{R}} = -2\text{i}\sqrt{3}.$$
2. Placer les points P, Q, R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.
3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
   Vérifier que l'affixe z_{S} du point S est $3 + \text{i}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.
4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer les affixes z_{A} et z_{C} des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r.
5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$.
   Calculer les affixes z_{B} et z_{D} des points B et D.
6. a. Démontrer que $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{P}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{P}}} = \text{i}$.
   b. En déduire la nature du triangle BCP.

Métropole Juin 2011 (4 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = \text{i}$, $z_{\text{C}} = -1$, $z_{\text{D}} = -\text{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe :
   - $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
   - $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
   - $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
   - $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\text{i}| = |z-1|$ est :
   - la médiatrice du segment [BC],
   - le milieu du segment [BC],
   - le cercle de centre O et de rayon 1,
   - la médiatrice du segment [AD].
3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\text{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :
   - la droite (CD) privée du point C,
   - le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
   - le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
   - la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :
   - le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
   - la droite (BD),
   - la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
   - le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

Centres étrangers Juin 2011 (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1
On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i}, \quad b = 3\mathrm{i}, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation
Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2
On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right) z$.
Affirmation
La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3
On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{2011}$.
Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Polynésie Septembre 2010 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2 + 4\mathrm{i}$, $b = -4 + 2\mathrm{i}$, $s = -5 + 5\mathrm{i}$ et $\omega = -2 + 2\mathrm{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3. On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de h.
   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2\mathrm{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2 - 4\mathrm{i}$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].
   a. Déterminer l'affixe p du point P.
   b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{P}\Omega}\right)$.
5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?