

Étude de suite, quelques rappels...

Exercice 1:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = n^3 - 6n^2 + n + 28$

1. Déterminer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure

Exercice 2:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 2 et de terme premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3 .
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure
4. Déterminer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Conclure

Exercice 3:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de terme premier terme $u_0 = 4$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3 .
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure
4. Déterminer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Conclure

Exercice 4:

Calculer les sommes suivantes :

- $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1902$
- $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 4096$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

Exercice 5:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3 .
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure

Exercice 6:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure
5. Déterminer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Conclure

Exercice 7:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{4 - u_n} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{3u_n + 2}{u_n}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 8:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier n , $u_n \geq 0$
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 9:

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

1. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

Exercice 10:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Déterminer tous les termes de la suite pour $n \in [0; 10]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Conclure