Utilisation des suites adjacentes

Soient a et b deux entiers donnés tels que $0 < a < b$. L'objectif de cette activité est d'approximer $\sqrt{ab}$.

1. Montrer que

$$a < \sqrt{ab} < b$$

2. Montrer que

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

L'encadrement $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ est meilleur que l'encadrement que $a < \sqrt{ab} < b$,

d'où l'idée de réitérer le procédé en remplaçant a par $\frac{2ab}{a+b}$ et b par $\frac{a+b}{2}$.

Ceci conduit à introduire les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n, a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

3. Montrer que la suite $(a_n b_n)$ est constante et que :

$$a < \sqrt{a_n b_n} < b$$

4. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

5. Montrer que pour tout entier n ,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

6. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

7. Montrer que pour tout entier n ,

$$0 \leq \sqrt{ab} - a_n \leq b_n - a_n$$

8. Conclure.

9. Compléter et entrer le programme ci-dessous dans le logiciel Albox :

```

1  VARIABLES
2   a EST_DU_TYPE NOMBRE
3   b EST_DU_TYPE NOMBRE
4   i EST_DU_TYPE NOMBRE
5   n EST_DU_TYPE NOMBRE
6   c EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8   LIRE a
9   LIRE b
10  LIRE n
11  POUR i ALLANT_DE 1 A n
12   DEBUT_POUR
13    c PREND_LA_VALEUR a
14    a PREND_LA_VALEUR .....
15    b PREND_LA_VALEUR .....
16    AFFICHER "Etape "
17    AFFICHER i
18    AFFICHER a
19    AFFICHER b
20   FIN_POUR
21  FIN_ALGORITHME

```