# Suites adjacentes

**Exercice 1:**

Dans les cas suivants, les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

1. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$ ;
2. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$ ;
3. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

**Exercice 2:**

L'objectif de cette exercice est de démontrer la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont deux suites adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.}}$$

1. Démontrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout entier $n$, $u_n \leq v_n$.
3. Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ converge vers deux limites $l$ et $l'$.
4. Montrer que $l = l'$.
5. Conclure.

**Exercice 3:**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \texttt{et} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_0 = 12 \quad \texttt{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique.
2. Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
3. Démontrer que la suite $(t_n)$ définie pour tout $n$, par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante.
4. Conclure.

**Exercice 4:**

On considère un nombre réel $a$ positif et les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout nombre entier naturel $n$ non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$. Existe-t-il une valeur de $a$ telle que les suites soient adjacentes ?