Suites monotones

Exercice 1:
L'objectif de cette exercice est de démontrer la propriété suivante :

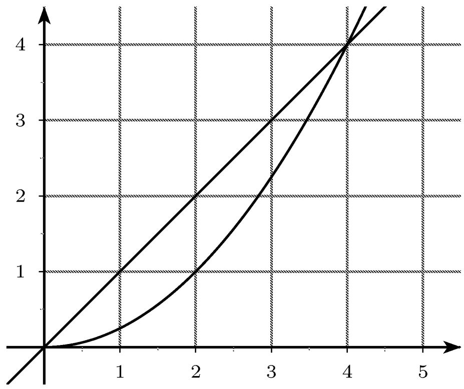
$$\boxed{\text{Si une suite } (u_n) \text{ est croissante et non majorée alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

1. A quelle condition dit-on qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$?
2. Démontrer la propriété.

Exercice 2:
Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que (u_n) converge vers un réel l.
1. Déterminer la nature de la suite (u_{n+1}).
2. Si f est continue en l, déterminer la nature de la suite $(f(u_n))$.
3. Que peut-on dire des suites (u_{n+1}) et $(f(u_n))$.
4. Conclure.

Exercice 3:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.
1. À l'aide de la calculatrice, observer le comportement de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite est décroissante.
4. Montrer que la suite est convergente et donner sa limite.

Exercice 4:
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2$.
1. On a tracé ci-dessous la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$ et la droite d'équation $y = x$. Placer u_0, u_1, u_2 et u_3.



2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 3$
3. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
4. (u_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.
5. Faire une étude similaire pour $u_0 = 5$.

Exercice 5:
La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6}$.
1. Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{8x+3}{x+6}$ sur $[1; 3]$.
2. Démontrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 3$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?