

Chapitre 8: Suites

1 Convergence

Définition:

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes d'une suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

Exemple:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ converge vers 2.

Définition:

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

Définition:

Une suite (u_n) est dit divergente si elle n'est pas convergente vers un réel a .

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = -1 \quad ; \quad u_2 = 1 \quad ; \quad u_3 = -1 \quad ; \quad \dots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:

Il y a deux type de suites divergentes :

- celle qui n'ont aucune limite ;
- celle qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

2 Récurrence

Principe :

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n et n_0 est un entier naturel.

Pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie, il suffit de :

- vérifier que $P(n_0)$ est vraie,
- considérer que pour un entier naturel quelconque $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et démontrer qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

3 Comportement asymptotique

Propriété:

f est une fonction définie sur un intervalle $]b; +\infty[$ et (u_n) est la suite définie par $u_n = f(n)$. l désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Propriété:

f est une fonction définie sur un intervalle I et (v_n) est la suite dont tous les termes appartiennent à I . Les lettres b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = c$$

Théorème: (Des gendarmes)

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$$

où a est un réel alors la suite (v_n) est convergente et sa limite l également.

Théorème:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n$$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$;
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

4 Suites monotones

Définition:

Soit (u_n) une suite,

- si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n alors on dit que (u_n) est majorée par M .
 M est alors un majorant de la suite (u_n) ;
- si il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout n alors on dit que (u_n) est minorée par m .
 m est alors un minorant de la suite (u_n) ;
- si (u_n) est à la fois majorée et minorée, on dit que (u_n) est bornée.

Propriété:

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Remarque:

Cette propriété permet de montrer qu'une suite est convergente mais ne fournit pas la limite.

Propriété:

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété:

On considère une suite (u_n) convergeant vers un réel l et m et M deux réels.

- si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang alors $l \leq M$;
- si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang alors $l \geq m$.

5 Suites adjacentes

Définition:

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

alors (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes.

Propriété:

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante) alors (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite l .

On a également $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout n .