Exercices type bac 2011

Antilles-Guyane Septembre 2010(5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
   a. Sur le graphique en annexe, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.
   b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.
   a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   d. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Centres étrangers Juin 2011(4 points)

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath})$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :
- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. (a) Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
   On prendra 10 cm comme unité graphique.
   (b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
   Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.
   (c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.
2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par
   $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

Amérique du Nord Mai 2011(6 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

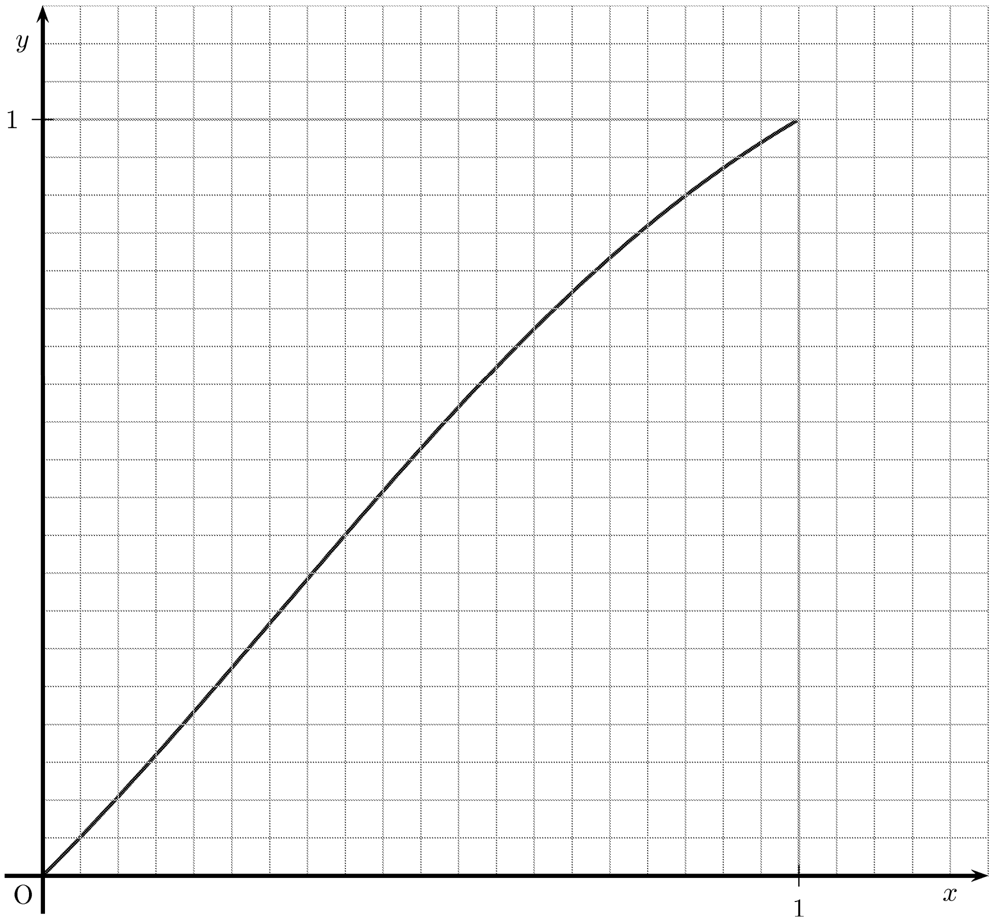
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

1. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans le repère ci-dessous :



2. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
3. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
4. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel}\, n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.