

Intégrales et primitives

Exercice 1:

On considère une fonction f continue et croissante sur I . On va démontrer que :

$$F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Pour montrer que F est une primitive de f , on va montrer que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel $x_0 \in I$.

1. Pour tout réel $h \neq 0$, déterminer

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

2. Pour $h > 0$, démontrer que :

$$f(x_0) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \mathrm{d}t \leq f(x_0 + h).$$

3. Pour $h < 0$, démontrer que :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \mathrm{d}t \leq f(x_0).$$

4. En déduire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

5. Conclure.

Exercice 2:

Montrer que si f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b ,

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f .

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 2x^3 \mathrm{d}x$

e. $\int_1^e \frac{3}{x} \mathrm{d}x$

i. $\int_0^\pi \cos(t) \mathrm{d}t$

b. $\int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

f. $\int_0^2 e^x - 3 \mathrm{d}x$

j. $\int_{-\pi}^\pi \sin(\theta) \mathrm{d}\theta$

c. $\int_{-1}^2 x^2 + 6x - 4 \mathrm{d}x$

g. $\int_{-4}^5 e^{-x} \mathrm{d}x$

k. $\int_0^1 e^{2x} \mathrm{d}x$

d. $\int_1^2 \frac{5}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

h. $\int_1^3 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \mathrm{d}x$

l. $\int_1^2 1 - \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$

Exercice 4:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+2)^2} dx$

e. $\int_0^e \frac{-2}{x+1} dx$

i. $\int_0^\pi \cos(2t) dt$

b. $\int_1^2 \frac{1}{3x+2} dx$

f. $\int_0^1 4e^{2x-3} dx$

j. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t} dt$

c. $\int_{-\pi}^\pi \cos(3t + \pi) dt$

g. $\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{x} dx$

k. $\int_0^4 \frac{5}{\sqrt{x+5}} dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3t) dt$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$

l. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

Exercice 5:

Déterminer l'aire, en unités d'aire, comprise entre la courbe d'équation $y = -x^2 + 3x + 4$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

On commencera par tracer la courbe dans un repère d'unité 1 cm et hachurer l'aire que l'on veut calculer.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'unité graphique est 2 cm.

1. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$ limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln(2)$.
Calculer $\mathcal{A}$.