Chapitre 9: Intégration

1 Primitive

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exemple:
$\left(2x^2\right)' = 4x$ *donc la fonction* $F : x \mapsto 2x^2$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f : x \mapsto 4x$

Théorème:
f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.
- *La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.*
- *$x_0 \in I$ et c un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.*

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de f est définie par* $F(x) = \dots$	*sur* $I = \dots$
x^n *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour} \quad n \geq 0 \\ ]-\infty; 0[\; \textit{ou} \;]0; +\infty[& \textit{pour} \quad n \leq -2 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I.

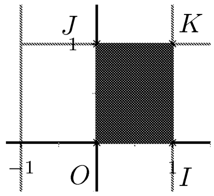
Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de f est définie par* $F(x) = \dots$	*Conditions*
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ *pour tout x de I*
$u' \cdot u^n$ *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	*pour* $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ *pour tout x de I*
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ *pour tout x de I*
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ *pour tout x de I*
$u'e^u$	e^u	*aucune*

Propriété:
- *F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I.*

2 Intégration

Dans un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.
Dans la suite :

- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal ;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.

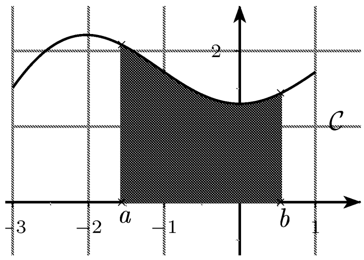


2.1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

2.1.1 Fonctions continues positives

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Définition:
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

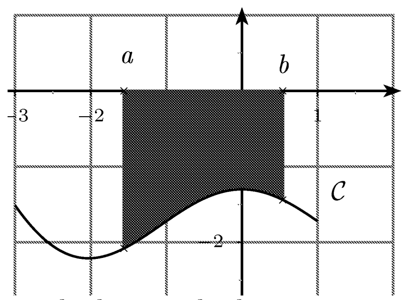
Remarque:
La variable x n'a pas d'importance, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(q)\mathrm{d}q$.

Propriété:
Dans ce cas où f est positive sur $[a;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

2.1.2 Fonctions continues négatives

Soit f une fonction négative et continue sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Définition:
On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'opposé de l'aire du domaine entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.



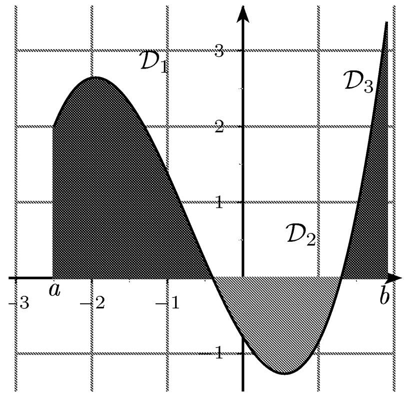
Concrètement, ci-dessus, c'est l'opposé de l'aire du domaine hachuré.

Propriété:
Dans ce cas où f est négative sur $[a;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Remarque:
Pour englober les cas f positive et f négative, on peut dire que l'intégrale de a à b de f est l'aire « algébrique »du domaine situé entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses (aire comptée positivement si $f \geq 0$ et négativement si $f \leq 0$).

2.1.3 Fonctions continues de signe quelconque

Définition:
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ (de signe quelconque) et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *est la somme des aires « algébriques » des domaines entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.*



Par exemple, sur la figure ci-dessus :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} - \mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}_3}$$

Définition:
Si f est continue sur $[a;b]$ (de signe quelconque) avec $a \neq b$, la valeur moyenne m de f sur $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

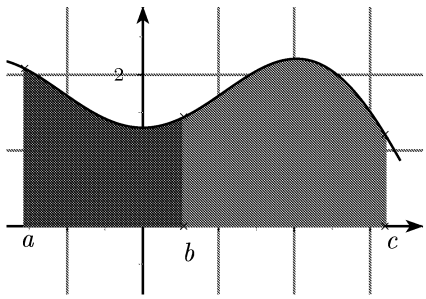
2.2 Propriétés des intégrales

Convention : Soit f continue sur $[a;b]$, on convient que $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Dans la suite du paragraphe, les fonctions f et g sont continues sur un intervalle I et a, b et c sont trois réels de I.

Propriété: (Relation de Chasles)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque:
Dans le cas où $a < b < c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Propriété: (Linéarité)

- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Corollaire:
Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Remarque:
Attention, la réciproque est fausse.

Démonstration:
Considérons $f-g\geq 0$ *par hypothèse donc* $\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Corollaire: (Inégalités de la moyenne)
Soit m *et* M *deux réels tels que* $m \leq f(x) \leq M$ *sur* $[a;b]$. *On a alors*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M$$

ou

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

2.3 Intégrales et primitives

Théorème:
Si f *est continue sur un intervalle* I, *et si* a *est un réel de* I, *la fonction* F *telle que*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f *sur* I *s'annulant en* a.

Remarque:
Cela veut dire que toute les fonctions continues admettent une primitive sur I.

Démonstration:
On étudiera uniquement le cas où f *est continue et croissante sur* I. *Soit* $x_0 \in I$, *on va montrer que* F *est dérivable en* x_0 :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{a} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$$

- *Or, pour* $h>0$, *comme la fonction* f *est croissante sur* $[x_0;x_0+h]$, *on a*

  $$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0+h) \text{ pour tout } x \in [x_0;x_0+h]$$

  La propriété d'inégalité de la moyenne nous donnent donc

  $$f(x_0) \leq \frac{1}{x_0+h-x_0}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0+h)$$

  c'est à dire

  $$f(x_0) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0+h).$$

- *De même, si* $h<0$, *comme la fonction* f *est croissante sur* $[x_0;x_0+h]$, *on a*

  $$f(x_0+h) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0).$$

Comme f *est continue en* x_0, *on a* $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ *donc, en appliquant le théorème des gendarmes sur l'encadrement précédent, on obtient*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = f(x_0).$$

On a donc démontré que F *est dérivable en* x_0 *et que* $F'(x_0) = f(x_0)$ *pour tout* $x_0 \in I$ *c'est à dire que* F *est une primitive de* f. *De plus,* $F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ *donc c'est bien une primitive qui s'annule en* a.

Corollaire: (fondamental)
Si f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

Démonstration:
Soit F une primitive de f alors $\varphi : x \mapsto F(x) - F(a)$ est la primitive de f s'annulant en a donc

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \varphi(b) = F(b) - F(a)$$

Remarque:
On note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

2.4 Intégration par parties

Propriété:
Soit u et v deux fonctions dérivables telles que u' et v' soit continues sur un intervalle $[a;b]$.
On a $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration:
Comme u et v sont dérivables, uv l'est également et $(uv)' = u'v + uv'$. Toutes ces fonctions sont continues donc on peut intégrer et on a :

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b (u(x)v(x))'\mathrm{d}x & = & \int_a^b u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b (u(x)v(x))'\mathrm{d}x & = & \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b v'(x)u(x)\mathrm{d}x \\ [u(x)v(x)]_a^b & = & \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b v'(x)u(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

d'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x \quad = \quad [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple:
Calculons $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.
Pour cela posons

$$u(x) = ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^2 \qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

Comme u' et v' sont continues sur $[1;2]$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2\ln(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{8}{3}\ln(2) - 0\right] - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \end{aligned}$$