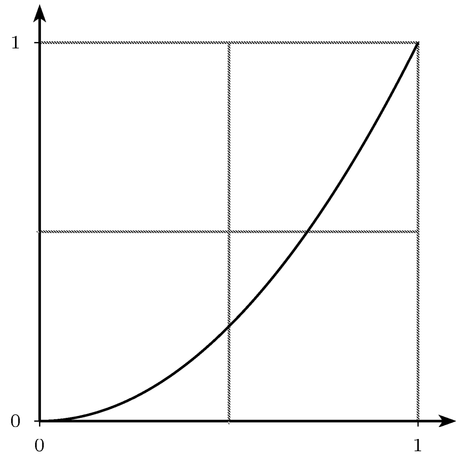
Aire sous la courbe et méthode des rectangles

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormée du plan. Pour tout entier n, $n \leq 2$, on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n sous intervalles de même longueur.

Cas n=2

On considère les fonctions en escaliers m_2 et M_2 définies par :

$$m_2 = \begin{cases} f(0) & si \quad -0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) & si \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad et \quad M_2 = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) & si \quad -0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ f(1) & si \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



a. Tracer les courbes de m_2 et M_2 sur $[0; 1]$.

b. Montrer que $m_2(x) \leq f(x) \leq M_2(x)$ sur $[0; 1]$.

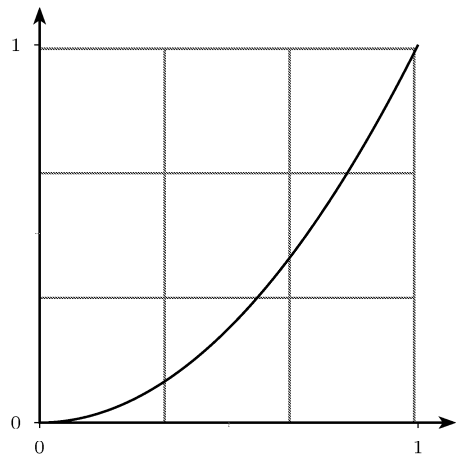
c. Déterminer $I(m_2) = \displaystyle\int_0^1 m_2(x)\mathtt{d}x$ et $I(M_2) = \displaystyle\int_0^1 M_2(x)\mathtt{d}x$

d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathtt{d}x$.

Cas n=3

On considère les fonctions en escaliers m_3 et M_3 définies par :

$$m_3 = \begin{cases} f(0) & si \quad -0 \leq x < \dfrac{1}{3} \\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) & si \quad \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3} \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right) & si \quad \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad et \quad M_3 = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{3}\right) & si \quad -0 \leq x < \dfrac{1}{3} \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right) & si \quad \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3} \\ f(1) & si \quad \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



a. Tracer les courbes de m_3 et M_3 sur $[0; 1]$.

b. Montrer que $m_3(x) \leq f(x) \leq M_3(x)$ sur $[0; 1]$.

c. Déterminer $I\left(m_3\right)$ et $I\left(M_3\right)$

d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathtt{d}x$.

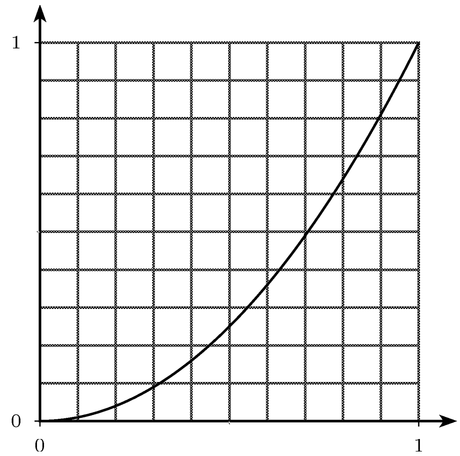
Cas général

On suppose n quelconque, $n \leq 2$. On appelle s_n la somme des aires des rectangles inférieurs donc

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

De même, on appelle S_n la somme des aires des rectangles supérieurs donc

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$



a. Montrer que :

$$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

b. Montrer que :

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

c. Montrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d. En déduire s_n et S_n en fonction de n.

e. Montrer que les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes.

f. Conclure.