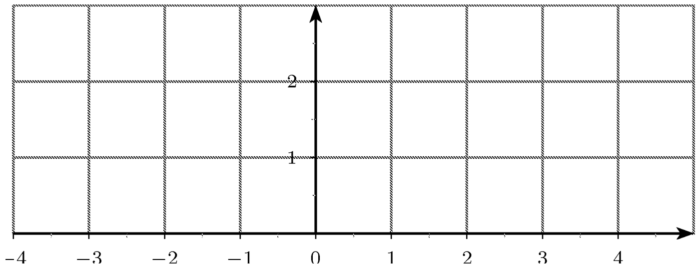
Propriétés des intégrales

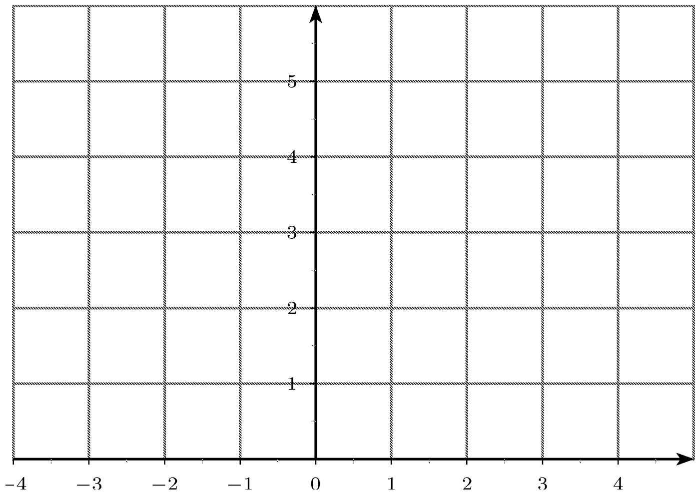
Exercice 1:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & si \quad -1 \leq x \end{cases}$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction f sur $[-4; 5]$.

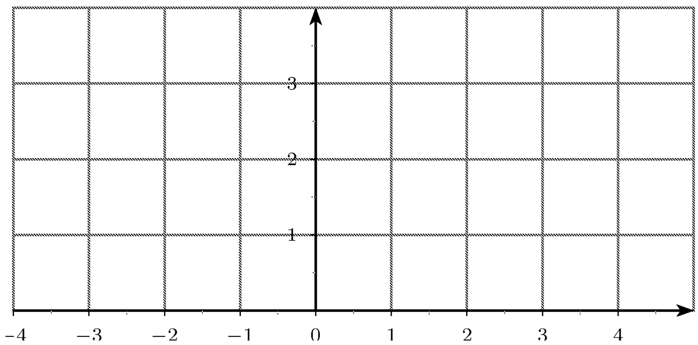


2. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.
3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction $2f$ sur $[-4; 5]$.



.

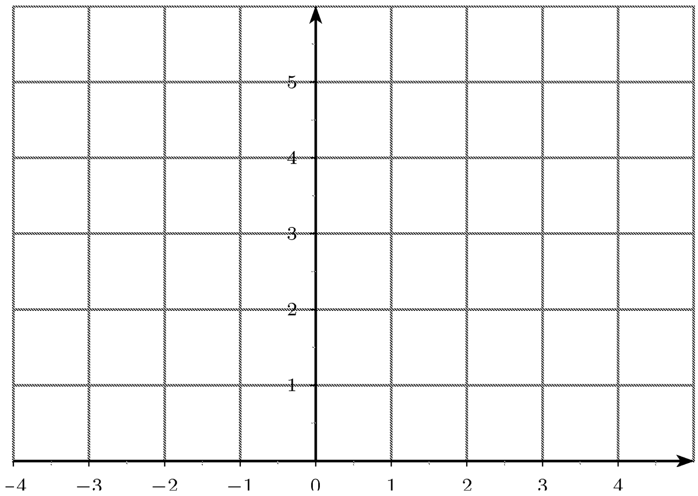
4. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} 2f(x)\mathrm{d}x$. Conclure.
5. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction g sur $[-4; 5]$.



.

6. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} g(x)\mathrm{d}x$.

7. Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) + g(x)$. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction h sur $[-4; 5]$.



.

8. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$. Conclure.

Exercice 2:

Démontrer la propriété suivante :

Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Exercice 3:

Démontrer la propriété suivante :

Soit m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$. On a alors : $\quad m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

Exercice 4:

Sachant que $\displaystyle\int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - 1$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 5e^x - 3x^2\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^1 e^x + 5x^2\mathrm{d}x$.

Exercice 5:

En utilisant l'inégalité de la moyenne, donner un encadrement de $\displaystyle\int_2^3 \ln(x)\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_1^3 e^x\mathrm{d}x$.