Correction du devoir bilan 1 : Nombres complexes

Exercice 1: 2 points

On utilise l'indication donnée dans l'exercice en posant $z = x + iy$, on obtient :

$$\begin{aligned}
3z - 2\overline{z} = 4 - 3i\overline{z} &\iff 3(x+iy) - 2(x-iy) = 4 - 3i(x-iy) \\
&\iff 3x + i3y - 2x + i2y = 4 - i3x - 3y \\
&\iff x - 4 + 3y + i(5y + 3x) = 0 \\
&\iff \begin{cases} x - 4 + 3y = 0 \\ 5y + 3x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 4 + 3 \times \dfrac{-3}{5}x = 0 \\ y = \dfrac{-3}{5}x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{-4}{5}x = 4 \\ y = \dfrac{-3}{5}x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \\
&\iff z = -5 + 3i
\end{aligned}$$

Exercice 2: 4 points

1. $z^2 = z - 1 \iff z^2 - z + 1 = 0$ et le polynôme $P(z) = z^2 - z + 1$ est à coefficients réels.
   On obtient $\Delta = -3 < 0$ donc l'équation $z^2 = z - 1$ admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad et \qquad z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

2. On obtient par calcul que $|z_1| = 1$ et $arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}$ et on en déduit que $|z_2| = 1$ et $arg(z_2) = \dfrac{-\pi}{3}$ puisque z_2 est le conjugué de z_1.
3.

$$(iz + i - 1)^2 = iz + i - 2 \iff (iz + i - 1)^2 = (iz + i - 1) - 1 \iff Z^2 = Z - 1$$

   avec $Z = iz + i - 1$ donc d'après la question 1. on a :

$$\begin{aligned}
iz + i - 1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} &\qquad ou \qquad iz + i - 1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\
iz = \frac{3 + i(2 + \sqrt{3})}{2} &\qquad ou \qquad iz = \frac{3 + i(2 - \sqrt{3})}{2} \\
z = \frac{-3i + (2 + \sqrt{3})}{2} &\qquad ou \qquad z = \frac{-3i + (2 - \sqrt{3})}{2}
\end{aligned}$$

   Conclusion : L'équation $(iz + i - 1)^2 = iz + i - 2$ admet deux solutions : $\dfrac{-3i + (2 + \sqrt{3})}{2}$ et $\dfrac{-3i + (2 - \sqrt{3})}{2}$

Exercice 3: 6 points

1. Pour z_1 :

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ et } \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} \text{ donc } arg(z_1) = \frac{-\pi}{6}$$

   Pour z_2 :

$$|z_2| = \sqrt{2} \text{ et } \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \text{ donc } arg(z_2) = \frac{-\pi}{4} \text{ Pour } \frac{z_1}{z_2} :$$

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \text{ et } arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = -\frac{-\pi}{6} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

2. Forme trigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}$$

Forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{4} \\
&= \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}
\end{aligned}$$

3. On en déduit que $cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4: 8 points

1.

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{1+2i-4}{1+2i+2} \\
&= \frac{-3+2i}{3+2i} \\
&= \frac{(-3+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\
&= \frac{-5+12i}{13}
\end{aligned}$$

Conclusion : $I(1+2i)$ a pour image $I'\left(\dfrac{-5+12i}{13}\right)$.

2. Pour $z \neq -2$:

$$\begin{aligned}
z' = z &\iff \frac{z-4}{z+2} = z \\
&\iff z-4 = z(z+2) \\
&\iff z-4 = z^2+2z \\
&\iff z^2+z+4 = 0 \\
&\iff z = \frac{-1+i\sqrt{15}}{2} \qquad ou \qquad z = \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les points $M_1\left(\dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2}\right)$ et $M_2\left(\dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2}\right)$ sont leur propre image.

3. Pour $z \neq -2$:

$$\begin{aligned}
z' = i &\iff \frac{z-4}{z+2} = i \\
&\iff z-4 = i(z+2) \\
&\iff z-4 = iz+2i \\
&\iff (1-i)z = 4+2i \\
&\iff (1-i)(1+i)z = (4+2i)(1+i) \\
&\iff 2z = 4+4i+2i-2 \\
&\iff z = 1+3i
\end{aligned}$$

Conclusion :$J(1+3i)$ a pour image $J'(i)$.

4. Pour $z \neq -2$:

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{x+iy-4}{x+iy+2} \\
&= \frac{(x+iy-4)(x-iy+2)}{(x+2)^2+y^2} \\
&= \frac{x^2-ixy+2x+ixy+y^2+2iy-4x+4iy-8}{(x+2)^2+y^2} \\
&= \frac{x^2-2x+y^2-8+6iy}{(x+2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

5. Pour $z \neq -2$:

$$\begin{aligned} z' \quad est \quad rel &\iff Im(z') = 0 \\ &\iff \frac{6y}{(x+2)^2+y^2} = 0 \\ &\iff y = 0 \end{aligned}$$

De plus, le point d'affixe -2 vérifie l'équation $y = 0$ donc l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points $M(z)$ du plan tels que z' soit réel est l'axe des abscisses privé du point d'affixe -2.

6. Pour $z \neq -2$:

$$\begin{aligned} z' \quad est \quad imaginaire \quad pur &\iff Re(z') = 0 \\ &\iff \frac{x^2-2x+y^2-8}{(x+2)^2+y^2} = 0 \\ &\iff x^2-2x+y^2-8 = 0 \\ &\iff (x-1)^2+y^2 = 9 \end{aligned}$$

De plus, le point d'affixe -2 vérifie l'équation $(x-1)^2+y^2 = 9$ donc l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points $M(z)$ du plan tels que z' soit imaginaire pur est le cercle de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon 3 privé du point d'affixe -2.

7. Tracer des ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$: