

DEVOIR BILAN 3		
Enseignant : GREAU D. Classe : TS2 Date : 18/11/2011	Nom : Prénom :	Note :

Exercice 1:

3 points

Prérequis : La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\cos$.

- En utilisant la définition de nombre dérivé, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- Que peut-on en déduire sur la continuité de la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

Exercice 2:

6 points

Pour tout complexe z , on considère $f(z) = z^4 - 3z^3 + 21z^2 - 48z + 80$.

- Montrer que $4i$ est solution de $f(z) = 0$.
 - Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
 - Montrer que si α est un nombre complexe tel que $f(\alpha) = 0$ alors $f(\bar{\alpha}) = 0$.
 - En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
- Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, $f(z) = (z^2 + 16)(z^2 + az + b)$.
- Résoudre $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3:

2 points

- Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$$

- En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Exercice 4:

9 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 + x - e^x$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.**1. Limites de la fonction f :**

- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$.
- Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x \left(\frac{5}{x} + 1 - \frac{e^x}{x} \right)$
- En déduire la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

2. Étude des variations de la fonction f :

- Déterminer la fonction dérivée de f .
- Résoudre $1 - e^x > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Résolution de $f(x) = 0$:

- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et une unique solution notée β appartenant à l'intervalle $] -\infty; 0]$.
- Donner les valeurs approchées de α et β arrondies au centième.

- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ pour $x \in [-6; 2]$.