

DEVOIR BILAN 7

Enseignant : GREAU D.

Nom :

Note :

Classe : TS2

Prénom :

Date : 28/05/2012

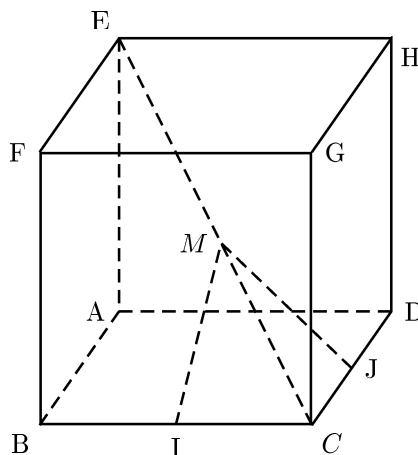
Exercice 1:

5 points

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.

Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



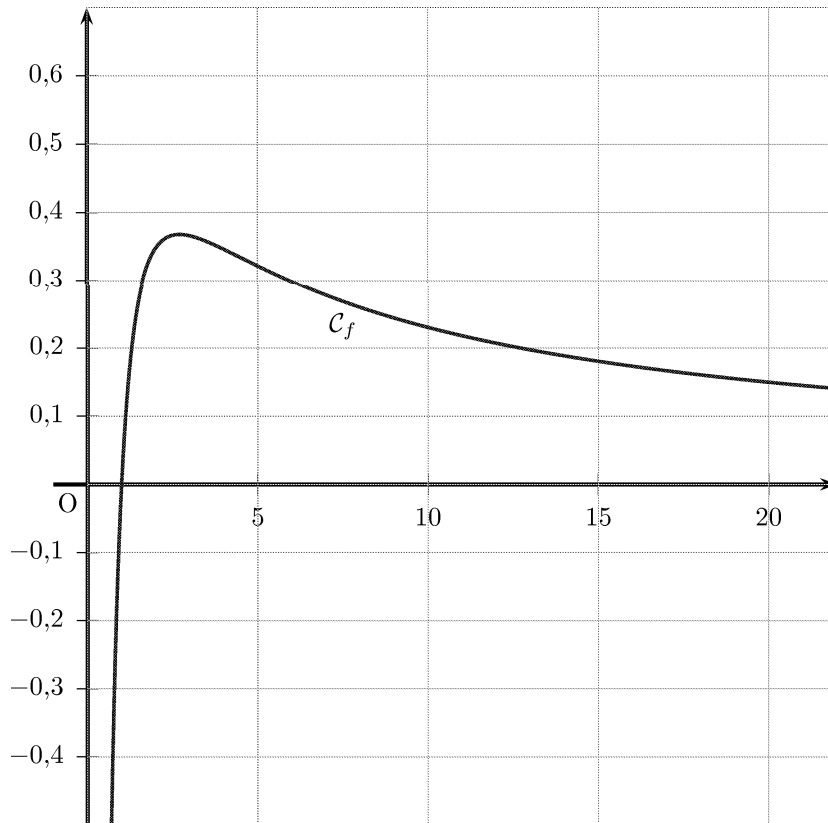
1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C , E , I et J .
b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t ; 1-t ; t)$.
2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.
b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M .
c. Exprimer IM^2 en fonction de t .
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.

On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

- a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal (On pourra s'aider du cercle trigonométrique).
- b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale. (On pourra se placer dans le triangle MIJ).
- c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

- d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.
- e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment $[EC]$.



Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessus.

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 - Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - En déduire les variations de la fonction f .
2. Étude d'une fonction g
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
- Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.
- Calculer la dérivée g' de la fonction g .
 - Dresser le tableau de variation de la fonction g .
3. a. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$.
4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
En exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.