Devoir maison 10

Exercice 1: 12 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel $n,\ \alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
   b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.
   Placer les nombres $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   c. Préciser la valeur de α_1.
   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = \ln x - x + 1.$$

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.
   c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Exercice 2: 8 points

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on donne les points $A(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $B(-6\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $C(4\ ;\ -3\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ -5\ ;\ -1)$.

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.
   d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?
2. On définit les points $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$, $K(0\,;0\,;1)$. Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

Annexe