

Devoir maison 2 : Nombres complexes

Exercice 1:

3 points

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 2:

2 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous :

$$2\bar{z} + iz = 4i - 3\bar{z}$$

Exercice 3:

8 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$

1. a. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
 b. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
 c. Montrer que la courbe représentative C_f de la fonction f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
 d. Étudier les positions relatives de C_f et Δ .
2. a. Déterminer les variations de la fonction f .
 b. Tracer la courbe de la fonction f .
3. Soit A un point de la courbe C_f d'abscisse $-2+h$ avec $h > 0$.
 a. Déterminer les coordonnées du point B , symétrique du point A par la symétrie de centre $\Omega(-2; 4)$.
 b. Montrer que le point B appartient à C_f .
 c. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 4:

7 points

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm et on appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O , d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b' .
 a. Calculer a' et b' .
 b. Placer les points A , A' , B et B' .
 c. Démontrer que $\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F , le point O .
 a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

- b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E) .
- c. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ) .