Devoir maison 3

Exercice 1: 8 points

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

   a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\mathrm{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

   b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

   a. Placer dans le plan $\mathcal{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\mathrm{i}$, $b = -3\mathrm{i}$, $c = 5 + 2\mathrm{i}$ et $d = 5 - 2\mathrm{i}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

   c. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\| = 10$$

   d. Tracer E sur la figure précédente.

Exercice 2: 12 points

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10(x-8)}{x(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthogonal.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

   c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$.

   c. Dresser le tableau de variation de f

3. Soit I le point de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   a. Déterminer une équation de la droite (Δ) tangente en I à la courbe $(\mathcal{C})$.

   b. Montrer que le point L, intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec son asymptote horizontale, appartient à la droite (Δ).

   c. Représenter la partie de la courbe $(\mathcal{C})$ pour les valeurs de x strictement supérieures à 1 (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée).

4. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x élément de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, on ait $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

5. On considère l'équation $f(x) = -x^2$ sur $]1;+\infty[$.

   a. A l'aide de la question 3.c. et de la courbe de la fonction $x \longmapsto -x^2$, résoudre graphiquement cette équation.

   b. Montrer l'équivalence suivante sur $]1;+\infty[$,

$$f(x) = -x^2 \Longleftrightarrow x^4 - x^3 + 10x - 80 = 0$$

   c. Montrer que la fonction $H : x \longmapsto x^4 - x^3 + 10x - 80$ s'annule pour un unique $\alpha \in]1;+\infty[$.

   d. Donner une valeur approché de α à 10^{-2} près.

   e. Résoudre $f(x) = -x^2$ sur $]1;+\infty[$.