# Devoir maison 4

**Exercice 1:** 4 points

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels $x$ et $y$, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n$, $(e^x)^n = e^{nx}$.

**Exercice 2:** 8 points

On note $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. **Étude des limites :**

   a. Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$ ?

2. **Étude des variations de la fonction $f$ :**

   a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction $f$ s'exprime, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

   b. Déterminer le signe de $f'$ et en déduire le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de $\alpha$ arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice 3:** 8 points

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

**PARTIE A :**

On définit :

- la suite $(u_n)$ par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.
- la suite $(S_n)$ par : pour tout entier naturel $n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
2. a. Déterminer le sens de variation de la suite $(S_n)$.
   b. Calculer $S_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(S_n)$.

**PARTIE B :**

Étant donné une suite $(x_n)$, de nombres réels, définie pour tout entier naturel $n$, on considére la suite $(S_n)$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas :

Proposition 1 : si la suite $(x_n)$ est convergente, alors la suite $(S_n)$ l'est aussi.

Proposition 2 : les suites $(x_n)$ et $(S_n)$ ont le même sens de variation.