

Devoir maison 5

Exercice 1:

5 points

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.

40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile. Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »

M : « la grille est de niveau moyen »

D : « la grille est de niveau difficile »

R : « Pierre réussit la grille » et \bar{R} son événement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2.
 - a. Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
 - b. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
 - c. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

Exercice 2:

7 points

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- parmi les jouets qui ont un défaut de finition, 75 % réussissent le test de solidité.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.
 - a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
 - b. Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Calcul de probabilités.
 - a. Démontrer que $P(S) = 0,934$.
 - b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition (On donnera le résultat arrondi au millième).
3. Étude d'une variable aléatoire B .

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .

Exercice 3:

8 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.

Sur l'annexe, sont tracées dans le repère, les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .

- a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 , et Γ_2 ?
- c. Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

