Devoir maison 6

Exercice 1: 7 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -11 + 4\text{i},\ z_{\text{B}} = -3 - 4\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 5 + 4\text{i}.$$

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   a. Montrer que l'affixe de E vérifie $z_{\text{E}} = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\text{i}$.
   b. Placer le point E.
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   b. Placer le point D .
5. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
   Montrer que B, I et J sont alignés.

Exercice 2: 7 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

A rendre avant le 16/01/2012

Exercice 3: 7 points

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par :

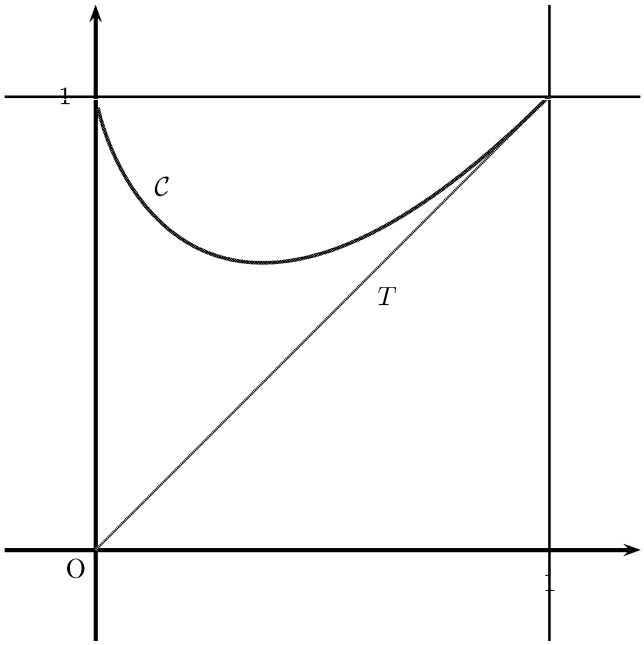
$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\right)$.

T est la droite d'équation $y = x$.

La courbe $\mathcal{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
   b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\,;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$.
   b. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ 1]$.
   c. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et dresser le tableau de variation de g.
   On ne cherchera pas la limite de g en 0.
   b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.