Devoir maison 7

Exercice 1: 3 points

Les trois questions sont indépendantes. Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i}, \quad b = 3\mathrm{i}, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation

Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}\right) z$.

Affirmation

La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{2011}$.

Affirmation

Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Exercice 2: 7 points

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant
   $$\left\{\begin{array}{lcl} g'(x) & = & g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 \end{array}\right.$$
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que
   $$u_n = (\mathrm{e} - 1) f\left(\frac{1}{n}\right)$$
2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e} - 1$.