Devoir maison 8

Exercice 1:

7 points

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- a. Calculer v_0 .
 - b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - d. Exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- a. Calculer w_0 .
 - b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
 - d. Exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 2:

5 points

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. a. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4
b. Conjecturer une expression de u_n , en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3:

8 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i \left(\frac{z - 2 + 3i}{z - i} \right)$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f .
2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.
b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.

On pensera à déterminer $|z'|$

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

On pensera à déterminer $\arg(z')$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).