# Devoir maison 9

**Exercice 1:** 5 points

**Question de cours**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues, dérivables sur I telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a;b]$ de I.

**Partie A**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$.
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
On suppose que $f'$ est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (f(1) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$

**Partie B**

On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-2;2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $]-2;2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-2;2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.
   b. En déduire les variations de $f$ sur l'intervalle $]-2;2[$.

**Partie C**

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée sur la feuille annexe.
Hachurer sur cette feuille la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points $M(x;y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en cm$^2$ l'aire de $\mathcal{P}$.

**Exercice 2:** 4 points

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et soit $H$ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   a. Justifier que $f$ et $H$ sont bien définies sur $[1;+\infty[$
   b. Quelle relation existe-t-il entre $H$ et $f$ ?
   c. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.
2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.
   b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
   c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.
   d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 3:** 4 points

Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

**Partie A**

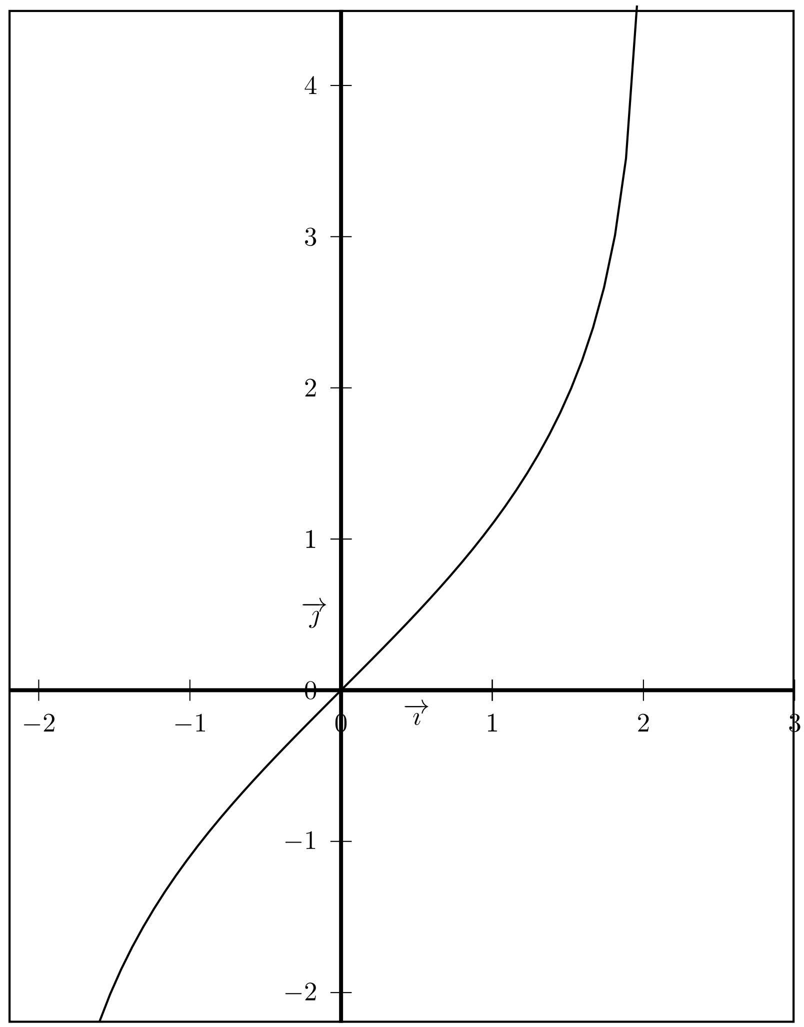
*Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.*
*Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.*
*Une bonne réponse donne* $0,75$ *point, une mauvaise réponse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse est comptée* $0$ *point.*
*Tout total négatif est ramené à zéro.*

1. $a$ est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :
   **a.** $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ **b.** $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ **c.** $u_0 = -a + 1$ **d.** $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$
2. Si $v$ est strictement croissante, alors :
   a. $u$ est strictement décroissante et majorée par 2
   b. $u$ est strictement croissante et minorée par 1
   c. $u$ est strictement croissante et majorée par 2
   d. $u$ est strictement décroissante et minorée par 1
3. Si $v$ diverge vers $+\infty$, alors :
   a. $u$ converge vers 2
   b. $u$ diverge vers $+\infty$
   c. $u$ converge vers 1
   d. $u$ converge vers un réel $\ell$ tel que $\ell > 1$
4. Si $v$ est majorée par 2, alors :
   a. $u$ est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   b. $u$ est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   c. $u$ est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$
   d. $u$ est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

**Partie B**

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.

# Annexe


4
3
2
1
$\overrightarrow{\jmath}$
0
$\overrightarrow{\imath}$
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2