Approximation du nombre d'or

A. Le nombre d'or

Le nombre d'or, noté φ , est la solution positive de l'équation $1+x=x^2$.

1. Déterminer φ puis montrer que $\varphi+\dfrac{1}{\varphi}=\varphi$ et $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$.
2. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur L et de largeur l tel que $\dfrac{L}{l}=\varphi$. Montrer que si l'on enlève à ce rectangle le carré $BCEF$ alors le rectangle $AFED$ vérifie la même propriété que le rectangle $ABCD$.

B. Une première approximation

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

1. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'aide de votre calculatrice.
2. Montrer que pour tout entier n, $1\leq u_n\leq 2$.
3. Montrer que (u_n) converge vers φ.
4. Donner la valeur exacte de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$

C. Une seconde approximation

On considère la suite (v_n) définie par $v_0=1$ et pour tout entier n, $v_{n+1}=1+\dfrac{1}{v_n}$.

1. Conjecturer le comportement de la suite (v_n) à l'aide de votre calculatrice.
2. Montrer que pour tout entier n, $1\leq v_n\leq 2$.
3. Montrer que pour tout entier n,
$$|v_{n+1}-\varphi|\leq\frac{1}{\varphi}\,|v_n-\varphi|$$
4. En déduire que pour tout entier n,
$$|v_n-\varphi|\leq\frac{1}{\varphi^n}\,|1-\varphi|$$
Conclure
5. Donner la valeur exacte de $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$