Étude générale des suites arithmético-géométriques

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe des réels a et b tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = au_n + b$.

Étude générale

1. Donner la nature de la suite (u_n) si $b = 0$ ou $a = 1$. On suppose pour la suite que $b \neq 0$ et $a \neq 1$.
2. Montrer que la suite (v_n) où $v_n = u_n - l$ et $l = \frac{b}{1-a}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis l'expression de u_n en fonction de n .
4. Pour quels valeurs de a et b la suite (u_n) est-elle convergente?

Exemples

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$ tel que $u_0 = 4$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
2. En déduire les variations de la suite (u_n) .
3. La suite (u_n) est-elle convergente?
4. Faire la même étude avec la suite (t_n) la suite définie par $t_{n+1} = -3t_n + 1$ tel que $t_0 = 1$.

Vélibre

La société « Vélibre » spécialisée dans la location de vélos a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de revendre 20% des vélos les plus usagés en janvier de chaque année ;
- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année.

Exprimer en fonction de n le nombre u_n de vélos du parc en janvier de l'année $2010 + n$.