Correction de l'exercice 3

1. **Limites de la fonction f :**
   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
   b. Pour tout réel $x\neq 0$, on a immédiatement que $f(x)=x\left(\dfrac{5}{x}+1-\dfrac{e^x}{x}\right)$
   c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x}+1-\dfrac{e^x}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
2. **Étude des variations de la fonction f :**
   a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=1-e^x$
   b. Sur $\mathbb{R}$, $1-e^x>0\iff e^0>e^x\iff 0>x$ d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+\ 0\ -$	

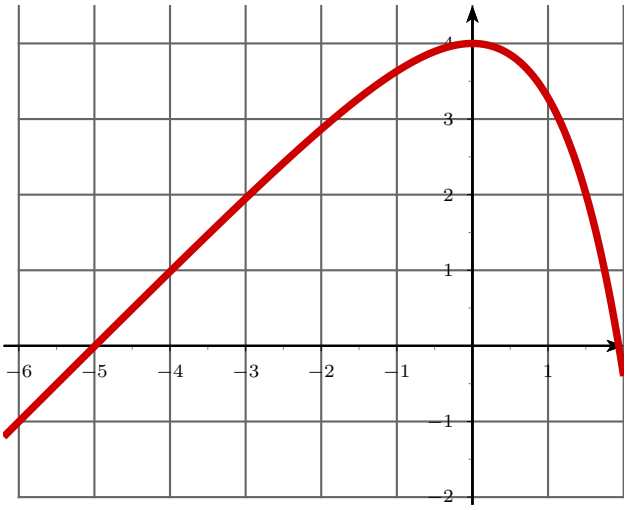
   c. Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	4	$-\infty$

3. **Résolution de $f(x)=0$:**
   a. • f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$. De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \texttt{et} \quad f(0)=4$$

   donc $0\in]-\infty;4]$ d'où d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $]-\infty;0]$. De plus $\beta\simeq -4,99$
   • f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus :

$$f(0)=4 \quad \texttt{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

   donc $0\in]-\infty;4]$ d'où d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$. De plus $\alpha\simeq 1,94$
4. Courbe $\mathcal{C}$: