Suites et nombres complexes...

Exercice 1:
On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$
   a. Calculer v_0 puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   c. Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$
   a. Calculer w_0.
   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   d. Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$

Exercice 2:
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2 - 3\text{i}$, $z_{\text{B}} = \text{i}$ et $z_{\text{C}} = 6 - \text{i}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe $z$distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \text{i}\left(\frac{z - 2 + 3\text{i}}{z - \text{i}}\right)$$

1. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 1 - \text{i}$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.
2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.
   b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\text{O}M' = \dfrac{\text{A}M}{\text{B}M}$.

   On pensera à déterminer $|z'|$
4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

   $$\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

   On pensera à déterminer $arg(z')$
5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).